Teori Himpunan

Oleh : Hanung N. Prasetyo

Meski sekilas berbeda, akan kita lihat bahwa logika matematika dan teori himpunan berhubungan sangat erat.

<u>Definisi:</u> himpunan (*set*) adalah kumpulan obyek-obyek tidak urut (*unordered*) atau berbeda

Obyek dalam himpunan disebut elemen atau anggota (*member*)

Himpunan yang tidak berisi obyek disebut himpunan kosong (*empty set*)

Universal set berisi semua obyek yang sedang dibahas

Contoh : S = { a, e, i, o, u }

U = himpunan semua huruf

Teori Himpunan

- Himpunan: Kumpulan dari objek ("elemen") yang berbeda
- $a \in A$ "a adalah elemen dari A"
  "a adalah anggota dari A"
- $a \notin A$ "a bukan elemen dari A"
- $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ "A mengandung …"
- Urutan dari penyebutan elemen tidak berpengaruh.
- Seberapa sering elemen yang sama disebutkan tidak berpengaruh.

Kesamaan Himpunan

Himpunan A dan B dikatakan sama jika dan hanya jika keduanya memiliki elemen yang tepat sama.

Contoh :

- A = {9, 2, 7, -3}, B = {7, 9, -3, 2} ➡ A = B
- A = {anjing, kucing, kuda},
  B = {kucing, kuda, tupai, anjing} ➡ A □ B
- A = {anjing, kucing, kuda},
  B = {kucing, kuda, anjing, anjing} ➡ A = B

Contoh-contoh Himpunan

Himpunan "Standard" :

- Bilangan Cacah

  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

- Bilangan Bulat $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Bil. Bulat Positif $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- Bil. Riil $\mathbf{R} = \{47.3, -12, \pi, \ldots\}$
- Bil. Rasional $\mathbf{Q} = \{1.5, 2.6, -3.8, 15, \ldots\}$

  (definisi yg tepat akan dibahas kemudian)

Contoh-contoh Himpunan

- $A = \varnothing$ "himpunan kosong/himp. nol"
- $A = \{z\}$ Catatan: $z \in A$, tapi $z \neq \{z\}$
- $A = \{\{b, c\}, \{c, x, d\}\}$
- $A = \{\{x, y\}\}$
  Catatan: $\{x, y\} \in A$, tapi $\{x, y\} \neq \{\{x, y\}\}$
- $A = \{x \mid P(x)\}$
  "himpunan semua x sedemikian hingga P(x)"
- $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x > 7\} = \{8, 9, 10, \ldots\}$
  "notasi pembentuk himpunan"

Contoh-contoh Himpunan

Sekarang kita bisa mendefinisikan himpunan bilangan rasional Q:

$\mathbf{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbf{Z} \wedge b \in \mathbf{Z}^{+}\}$

atau

$\mathbf{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbf{Z} \wedge b \in \mathbf{Z} \wedge b \neq 0\}$

Bagaimana dengan bilangan riil R?

$\mathbf{R} = \{r \mid r \text{ adalah bilangan riil}\}$

Belum ada cara lain untuk menyatakannya dengan lebih baik.

Himpunan Bagian (*Subset*)

$A \subseteq B$ "A adalah himpunan bagian dari B"

$A \subseteq B$ jika dan hanya jika setiap elemen dari A adalah juga elemen dari B.

Yang bisa diformalkan sebagai:

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

Contoh:

$A = \{3, 9\}$, $B = \{5, 9, 1, 3\}$, $A \square B$? Benar

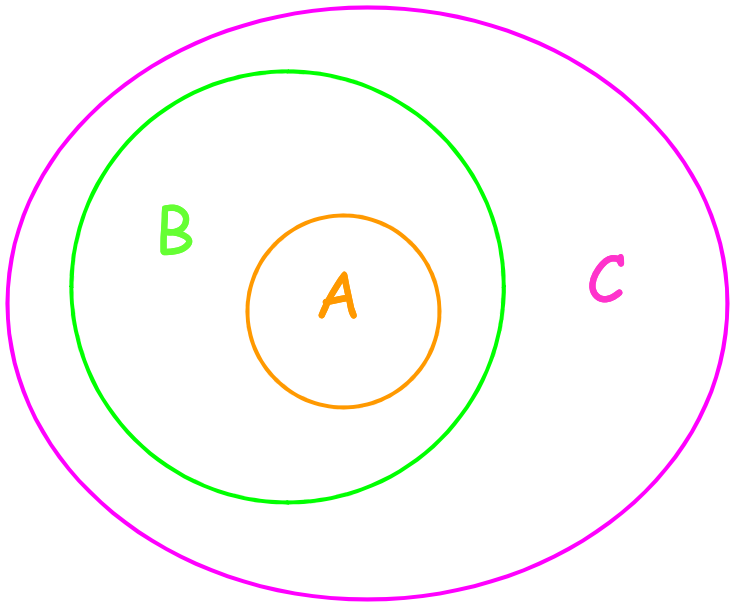
$A = \{3, 3, 3, 9\}$, $B = \{5, 9, 1, 3\}$, $A \square B$? Benar

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \square B$? Salah

Himpunan Bagian

Aturan-aturan yg bermanfaat :

- $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
- $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (lih. Diagram Venn)



Himpunan Bagian

Aturan-aturan yg bermanfaat:

- $\varnothing \subseteq A$ untuk sebarang himpunan A
- $A \subseteq A$ untuk sebarang himpunan A

Himpunan Bagian Sejati (*proper subset*):

$A \subset B$ "A adalah himp. bagian sejati dari B"

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x\,(x \in B \wedge x \notin A)$$

atau

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \neg\forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$$

Kardinalitas dari himpunan

Jika suatu himpunan memiliki n buah anggota yang berlainan, $n \in \mathbf{N}$, kita menyebut S sebagai himpunan berhingga dengan kardinalitas n.

Contoh:

A = {Mercedes, BMW, Porsche}, |A| = 3

B = {1, {2, 3}, {4, 5}, 6} |B| = 4

C = □ |C| = 0

D = { x□**N** | x □ 7000 } |D| = 7001

E = { x□**N** | x □ 7000 } E tak berhingga!

Himpunan Kuasa (*Power Set*)

2^A atau $P(A)$ "*power set* dari A"

$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$ (mengandung semua himpunan bagian dari A)

Contoh:

(1) $A = \{x, y, z\}$

$2^A = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

(2) $A = \varnothing$

$2^A = \{\varnothing\}$

Catatan : $|A| = 0$, $|2^A| = 1$

Himpunan Kuasa (*Power Set*)

Kardinalitas dari power set :

$$| 2^A | = 2^{|A|}$$

- Bayangkan setiap elemen didalam A memiliki saklar "ON/OFF"
- Setiap konfigurasi yang mungkin dari saklar didalam A berkorespondensi dengan satu elemen didalam 2^A

A	1	2	3	4	5	6	7	8
x	x	x	x	x	x	x	x	x
y	y	y	y	y	y	y	y	y
z	z	z	z	z	z	z	z	z

- Untuk A yang memiliki 3 elemen, terdapat 2□2□2 = 8 elemen didalam 2^A

Perkalian Kartesian

Suatu n-tupel berurutan (*ordered n-tuple*) $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ adalah sebuah koleksi berurut dari objek-objek.

Dua buah n-tupel berurut $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ dan $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ disebut sama jika dan hanya jika keduanya memiliki elemen-elemen yang tepat sama dalam urutan yang juga sama, yakni, $a_i = b_i$ untuk $1 \leq i \leq n$.

[jika n=2, disebut sbg pasangan berurut)

Perkalian Kartesian dari dua himpunan didefinisikan sebagai :

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Contoh: $A = \{x, y\}$, $B = \{a, b, c\}$

$A \times B = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$

Perkalian Kartesian

Perhatikan bahwa:

- $A \times \varnothing = \varnothing$
- $\varnothing \times A = \varnothing$
- Untuk himpunan A dan B yg tidak kosong:

  $A \neq B \Leftrightarrow A \times B \neq B \times A$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Perkalian Kartesian dari dua himpunan atau lebih didefinisikan sebagai:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$

Operasi terhadap himpunan

Penggabungan/ *Union*: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Contoh: $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d\}$

Irisan/*Intersection*: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Contoh: $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$

$A \cap B = \{b\}$

Operasi terhadap himpunan

- Dua buah himpunan disebut *disjoint* jika irisan dari keduanya adalah himpunan kosong:

$$A \cap B = \varnothing$$

- Perbedaan (pengurangan) antara dua himpunan, A dan B, adalah suatu himpunan yang memiliki elemen-elemen didalam A yang bukan elemen B:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Contoh:

$$A = \{a, b\},\ B = \{b, c, d\},\ A - B = \{a\}$$

Operasi terhadap himpunan

Komplemen dari himpunan A adalah himpunan yang mengandung semua elemen dalam semesta pembicaraan yang tidak ada di dalam A :

$$\overline{A} = U - A$$

Contoh: $U = \mathbf{N}$, $B = \{250, 251, 252, \ldots\}$

$$\overline{B} = \{0, 1, 2, \ldots, 248, 249\}$$

Operasi terhadap himpunan

Bagaimana membuktikan $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

Cara I:

$x \in A \cup (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$
(hukum distributif untuk logika matematika)

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Operasi terhadap himpunan

Cara II: Menggunakan tabel keanggotaan

1 berarti "*x* adalah anggota dari himpunan ini"

0 berarti "*x* adalah bukan anggota dari himpunan ini"

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

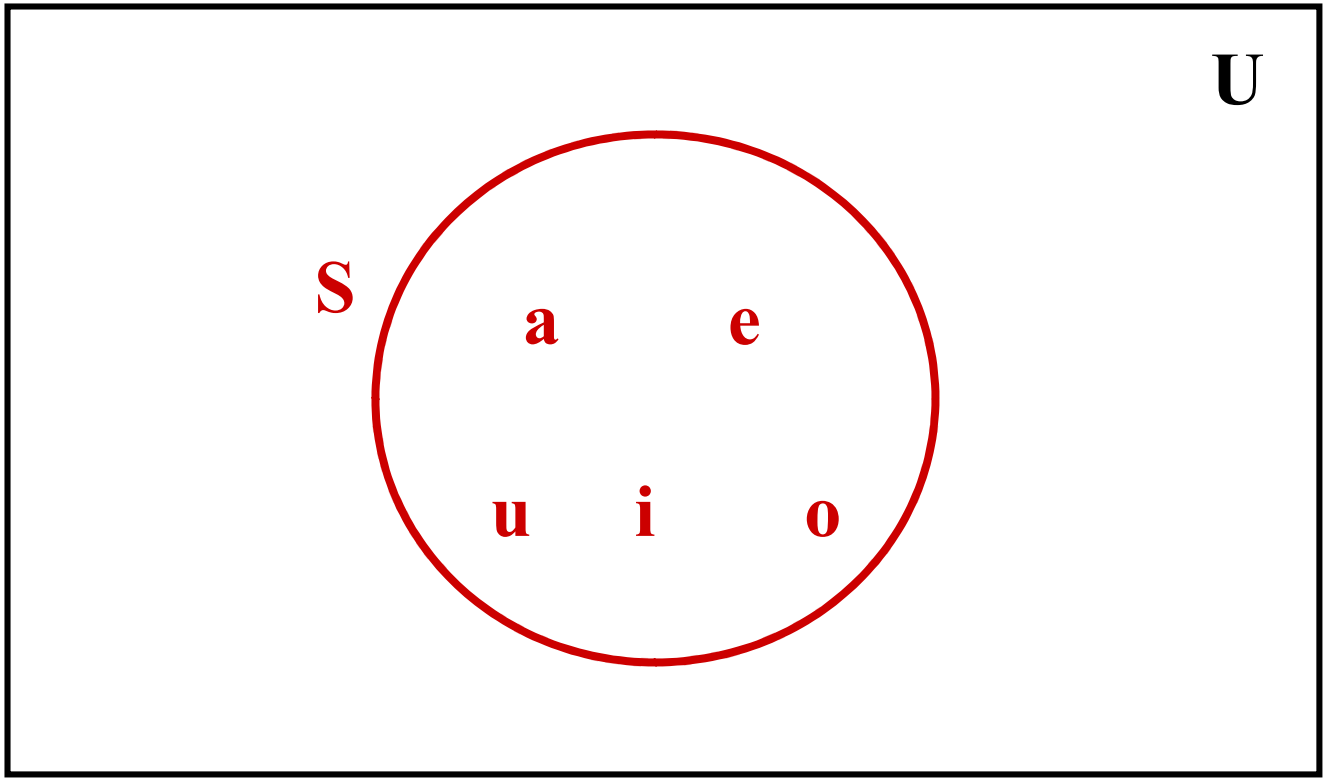
Operasi terhadap himpunan

Dari contoh-contoh yang diberikan, maka dapat kita simpulkan bahwa:

Setiap ekspresi logis dapat ditransformasikan ke dalam ekspresi ekivalen dalam teori himpunan dan begitu pula sebaliknya.

Diagram Venn

Salah satu cara merepresentasikan himpunan



Contoh (example 4):

N = { 0, 1, 2, 3, …. } = himpunan bilangan natural

Z = { …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …. } = himpunan bilangan bulat (*integer*)

Z^+ = { 1, 2, 3, …. } = himpunan *integer* positif

Q = { p/q | p $\in$ Z, q $\in$ Z, q $\neq$ 0 } = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan nyata (*real numbers*)

Definisi:

A dan B merupakan himpunan

$A = B$ **jika dan hanya jika elemen-elemen A sama dengan elemen-elemen B**

$A \subseteq B$ **jika dan hanya jika tiap elemen A adalah elemen B juga**

$\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

catatan: $\{\ \} \subseteq A$ **dan** $A \subseteq A$

$A \subset B$ **jika** $A \subseteq B$ **dan** $A \neq B$

$|A| = n$ **di mana A himpunan berhingga (*finite set*)**

(Himpunan A berisi n obyek yang berbeda)

disebut banyaknya anggota (*cardinality*) dari A

The Power Set:

S adalah himpunan berhingga dengan n anggota

Maka power set dari S -dinotasikan P(S)- adalah <u>himpunan dari semua subset</u> dari S dan $|P(S)| = 2^n$

<u>Contoh:</u> S = { a, b, c}

P(S) = { { }, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} }

The Cartesian Product:

A dan B adalah himpunan,

maka $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

<u>Contoh:</u>

A = { 1, 2 }

B = { p, q }

A X B = { (1, p), (1, q), (2, p), (2, q) } ***ordered pairs***

Selanjutnya …

A X A X A = { (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2),
(2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2) }
ordered triples

Secara umum:

(a_1, a_2, a_3, a_4) ***ordered quadruple***

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n)$ ***ordered n-tuple***

Operasi terhadap himpunan:

1. **A dan B himpunan**
2. $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
3. $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

   jika $A \cap B = \{ \}$ maka A dan B disebut *disjoint*
4. $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$
5. $\overline{A} = \{ x \mid x \notin A \} = U - A$, **di mana U = *universal set***
6. $A \oplus B = \{ x \mid x \in A \oplus x \in B \}$ $\oplus$ = ***xor***

<u>Identitas himpunan:</u> lihat tabel di halaman 89

<u>Contoh:</u>

Buktikan hukum De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Bukti: $\overline{A \cap B} = \{ x \mid x \notin (A \cap B) \}$

$= \{ x \mid \neg (x \in (A \cap B)) \}$

$= \{ x \mid \neg ((x \in A) \wedge (x \in B)) \}$

$= \{ x \mid (x \notin A) \vee (x \notin B) \}$

$= \{ x \mid (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) \}$

$= \{ x \mid x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \}$

Representasi komputer untuk himpunan:

U = *universal set* <u>berhingga</u>

S = himpunan

Maka $x \in S$ dinyatakan dengan bit "1"

dan $x \notin S$ dinyatakan dengan bit "0"

<u>Contoh:</u>

U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }

S = { 1, 3, 5, 7, 9 }

S direpresentasikan dengan 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0

<u>Contoh:</u>

U = { semua huruf kecil }

S = { a, e, i, o, u }

Representasinya:

10001 00010 00001 00000 10000 0

Prinsip inklusi-eksklusi

Prinsip inklusi-eksklusi:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$$

<u>Contoh:</u> Rosen halaman 456 no. 7

Dari survei terhadap 270 orang didapatkan hasil sbb.:

64 suka *donat*,

94 suka *bolu*,

58 suka *kacang*,

26 suka *donat* dan *bolu*,

28 suka *donat* dan *kacang*,

22 suka *bolu* dan *kacang*,

14 suka ketiga jenis makanan tersebut.

Berapa orang tidak suka makan semua jenis makanan yang disebutkan di atas ?

A = {orang yang suka *donat*}

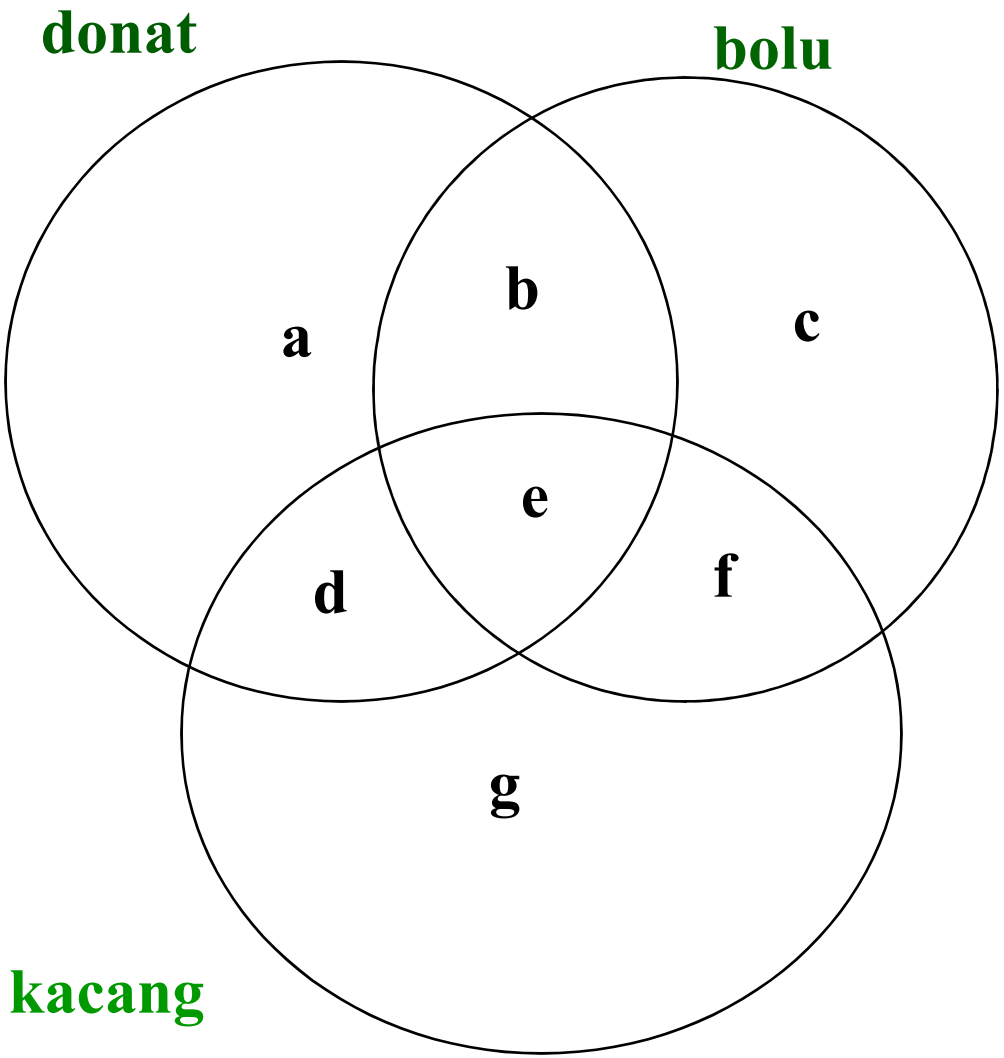
B = {orang yang suka *bolu*}

C = {orang yang suka *kacang* }

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 64 + 94 + 58 - 26 - 28 - 22 + 14 = 154$$

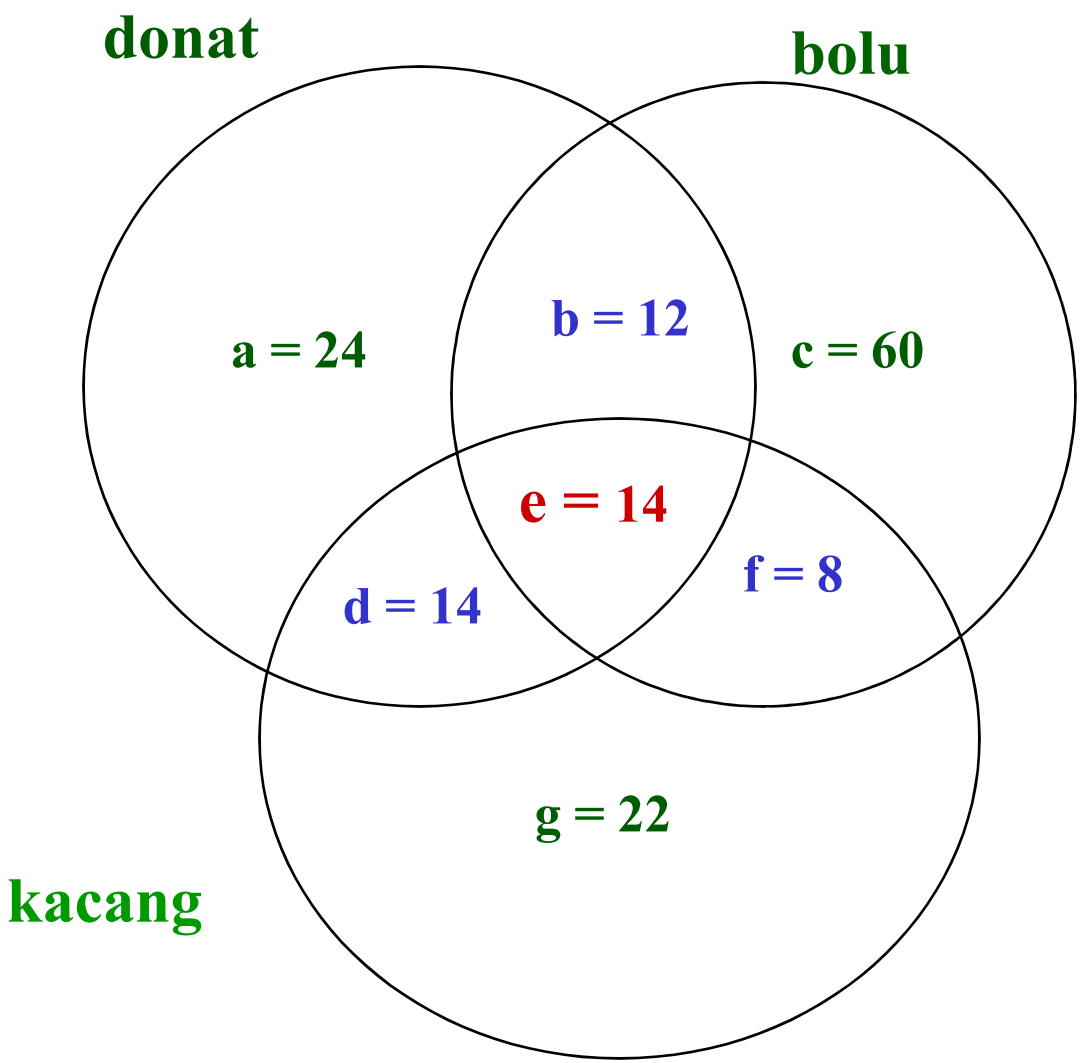
Jadi mereka yang <u>tidak</u> suka ketiga jenis makanan tersebut ada sebanyak 270 – 154 = 116 orang jenis sayur



64 suka *donat*,
94 suka *bolu*
58 suka *kacang*

26 suka *donat* & *bolu*
28 suka *donat* & *kacang*
22 suka *bolu* & *kacang*

14 suka ketiga jenis makanan tsb



64 suka *donat*,
94 suka *bolu*
58 suka *kacang*,

26 suka *donat* & *bolu*,
28 suka *donat* & *kacang*,
22 suka *bolu* & *kacang*

14 suka ketiga jenis makanan tsb

$a + b + d + e = 64$

$b + c + e + f = 94$

$d + e + f + g = 58$

$b + e = 26$

$d + e = 28$

$e + f = 22$

$e = 14$

yang <u>tidak</u> suka makanan = 270-24-12-60-14-14-8-22 = 116