Fungsi

Pengertian Fungsi

- Relasi : aturan yang mengawankan 2 himpunan
- **Fungsi**

Misalkan *A* dan *B* himpunan. Relasi biner *f* dari *A* ke *B* merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam *A* dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*, artinya :

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad jika \quad x_1 = x_2, \quad maka \quad f(x_1) = f(x_2)$$

Pengertian Fungsi

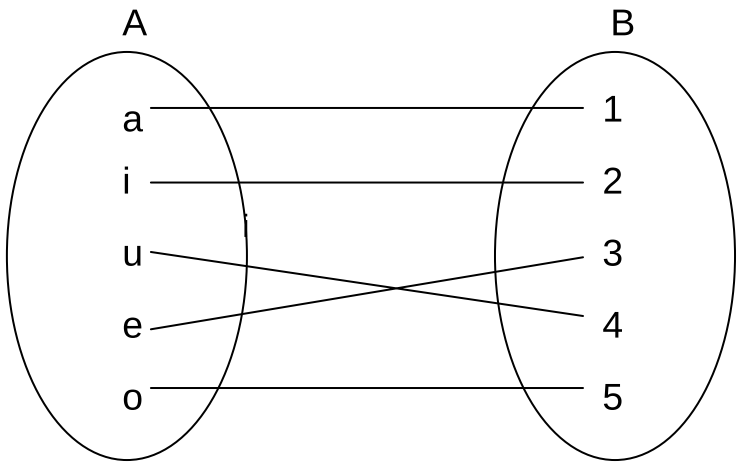
Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

$$f : A \to B$$

yang artinya f **memetakan** A ke B.

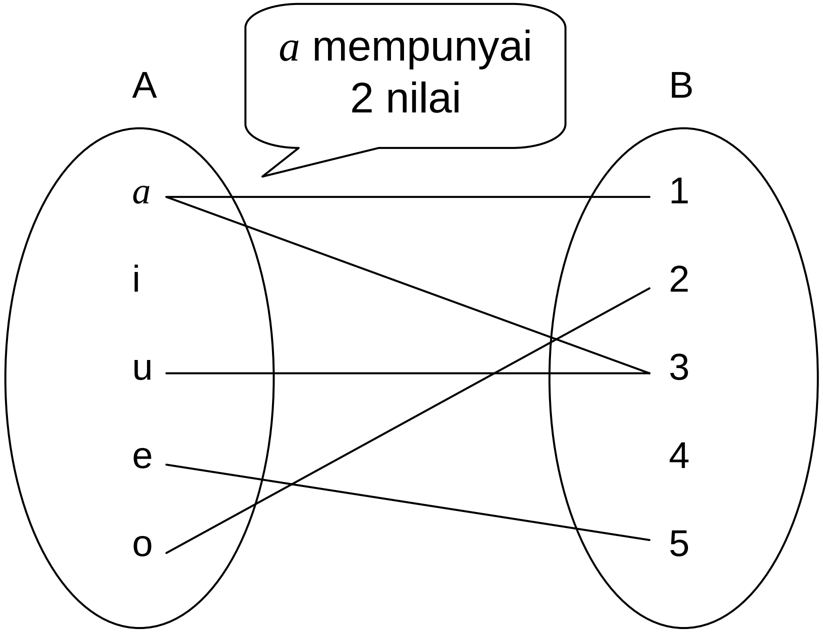
A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari f.

Relasi di bawah ini merupakan fungsi



Pengertian Fungsi

Relasi di bawah ini bukan merupakan fungsi :



Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan *f* disebut **jelajah** (*range*) / jangkauan dari *f*. Perhatikan bahwa jelajah dari *f* adalah himpunan bagian dari *B*.

Pengertian Fungsi

Jelajah : $\left\{ y \middle| f(x) = y, x \in A \right\} \subseteq B$

Jelajah/range/jangkauan dinotasikan dengan R_f

Contoh :

1. Carilah domain dan range dari fungsi :

$$f(x) = \frac{1}{4x+3}$$

Jawab :

a. Mencari domain

Pengertian Fungsi

syarat agar fungsi tersebut terdefinisi adalah :

$$4x + 3 \neq 0 \qquad x \neq -\frac{3}{4}$$

Sehingga $D_f = \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, \infty\right)$ atau $\Re - \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

b. Mencari Range

$R_f = \Re - \{0\}$ atau $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Hal ini dikarenakan $f(x)$ tidak mungkin bernilai nol

Contoh

2. Carilah domain dan range dari fungsi :

$$f(x) = \frac{x+2}{3x+1}$$

a. Mencari domain

Syarat agar fungsi tersebut terdefinisi adalah :

$$3x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{1}{3}$$

Sehingga $D_t = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

Contoh

b. Range

$$f(x) = y = \frac{x+2}{3x+1}$$

$$3xy + y = x + 2$$

$$3xy - x = 2 - y$$

$$x(3y-1) = 2 - y$$

$$x = \frac{2-y}{3y-1}$$

Syarat fungsi tersebut terdefinisi,

$$3y - 1 \neq 0$$

$$y \neq \frac{1}{3}$$

Jadi

$$R_f = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$$

Atau $\Re - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Contoh

3. Carilah domain dan range dari fungsi :

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$$

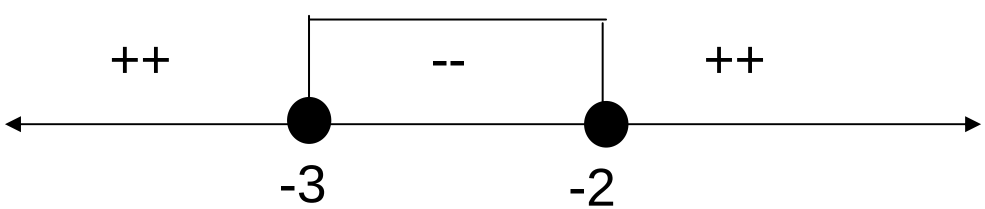
a. Mencari domain

Syarat agar fungsi tersebut terdefinisi adalah :

$$-x^2 - 5x - 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+3) \leq 0$$



TP = -2, -3

Jadi $D_f = [-3, -2]$

Contoh

b. Mencari Range

$$f(x) = y = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$$

$$y^2 = -x^2 - 5x - 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + \left(y^2 + 6\right) = 0$$

Agar $x \in \Re$, maka $D \geq 0$

$$\Leftrightarrow 25 - 4.1\left(y^2 + 6\right) \geq 0$$

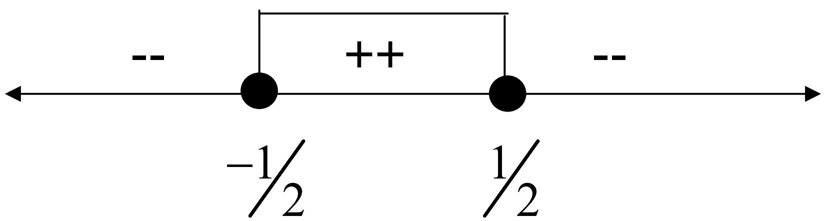
$$\Leftrightarrow 25 - 4y^2 - 24 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4y^2 \geq 0$$

Contoh

$$\Leftrightarrow (1+2y)(1-2y) \geq 0$$

$$TP = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$



Jadi, $R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap [0, \infty)$

$$= \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Macam-macam Fungsi

Macam-macam fungsi :

1. Fungsi polinom

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

-Fungsi konstan,

$$f(x) = a_0$$

-Fungsi linier,

$$f(x) = a_0 + a_1x$$

-Fungsi kuadrat,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Macam-macam Fungsi

2. Fungsi Rasional

Bentuk umum :

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

$p(x)$, $q(x)$ = fungsi polinom dengan $q(x) \neq 0$

contoh :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^3 + x^2 + 1}$$

3. Fungsi harga/nilai mutlak

Fungsi yang mengandung harga mutlak, contoh :

$$f(x) = 3|x-1| + 2|x-2|$$

Macam-macam Fungsi

4. Fungsi bilangan bulat terbesar

$\lfloor x \rfloor$ = Bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \le x \le n+1$$

$$\lfloor 5 \rfloor = 5 \qquad \lfloor -1{,}2 \rfloor = -2$$

$$\lfloor 3{,}2 \rfloor = 3$$

5. Fungsi Genap

Disebut fungsi genap jika $f(-x) = f(x)$ dan grafiknya simetris terhadap sumbu y

Macam-macam Fungsi

Contoh :

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = \cos(x)$$

6. Fungsi Ganjil

Disebut fungsi ganjil jika $f(-x) = -f(x)$ dan grafiknya simetris terhadap titik asal, contoh :

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = x^3$$

Macam-macam Fungsi

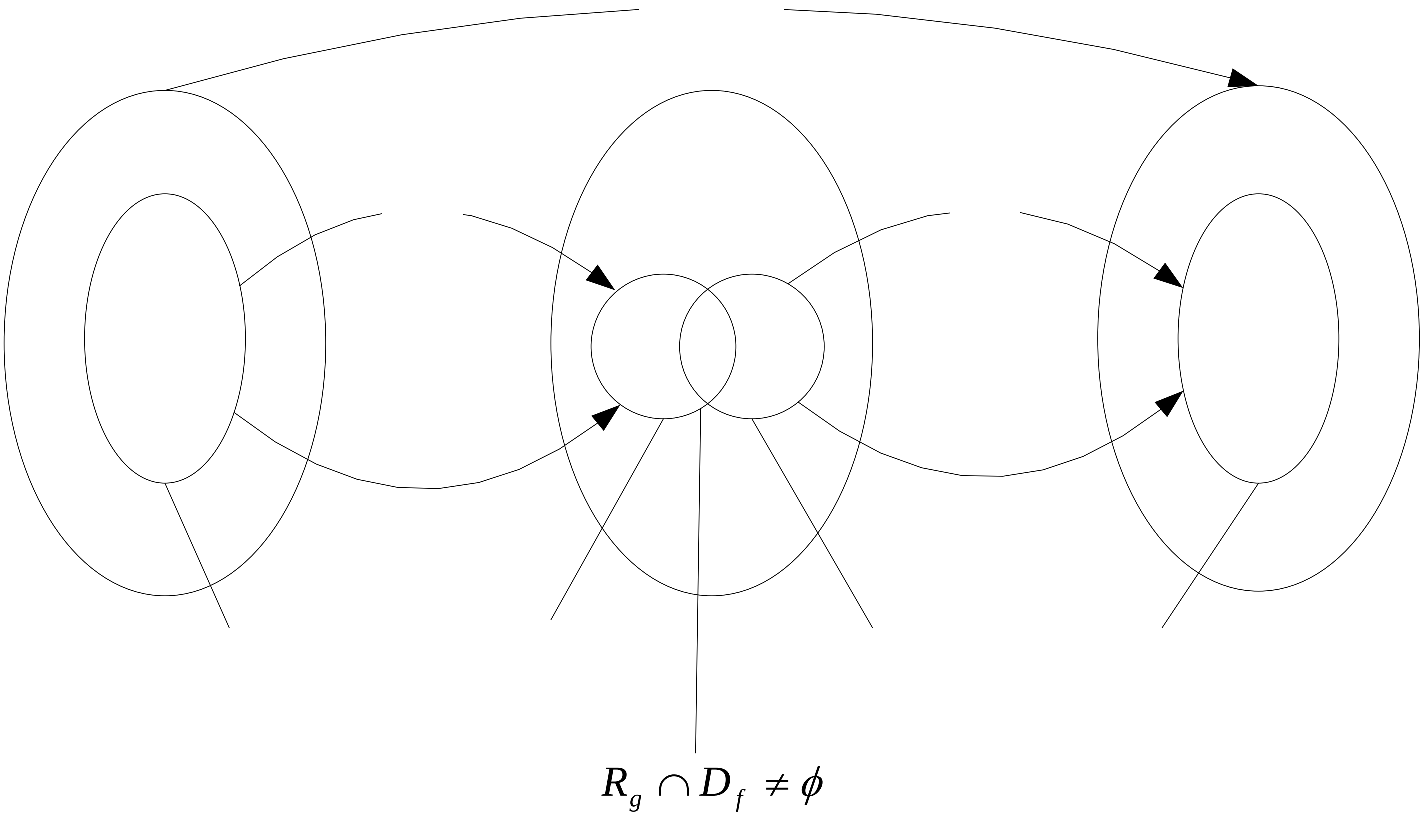
7. Fungsi Komposisi

Diberikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, komposisi fungsi antara $f(x)$ dan $g(x)$ ditulis $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ Domain dari $(f \circ g)(x)$ adalah himpunan semua bilangan *x* dengan domain $g(x)$ sehingga $g(x)$ di dalam D_f

Syarat agar dua fungsi bisa dikomposisisikan, maka harus terpenuhi $R_g \cap D_f \neq \phi$

Fungsi Komposisi

Hal tersebut dapat diilustrasikan sebagai berikut :



Fungsi Komposisi

Dengan cara yang sama, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Syarat agar dua fungsi bisa dikomposisikan, maka harus terpenuhi $R_f \cap D_g \neq \phi$

Domain dari komposisi fungsi f dan g didefinisikan sbb :

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$
$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

Sedangkan definisi dari Range komposisi fungsi komposisi

$$R_{g \circ f} = \{g(t) \in R_g \mid t \in R_f\} \text{ atau } R_{g \circ f} = \{y \in R_g \mid y = g(t), t \in R_f\}$$
$$R_{f \circ g} = \{f(t) \in R_f \mid t \in R_g\} \text{ atau } R_{f \circ g} = \{y \in R_f \mid y = f(t), t \in R_g\}$$

Fungsi Komposisi

Sifat-sifat fungsi komposisi :

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

Contoh :

1. Jika diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = 1 - x^2$ Tentukan

   $g \circ f$ dan $f \circ g$ beserta domain dan range-nya!

$$D_f = [0, \infty) \qquad D_g = \Re$$

$$R_f = [0, \infty) \qquad R_g = (-\infty, 1]$$

Contoh

Karena $R_f \cap D_g$ = $[0,\infty) \neq \phi$, maka fungsi $g \circ f$ terdefinisi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = 1 - x$$

a. Mencari Domain $g \circ f$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\}$$
$$= \left\{ x \in [0,\infty) \,\middle|\, \sqrt{x} \in \Re \right\}$$
$$= \left\{ x \geq 0 \,\middle|\, -\infty < \sqrt{x} < \infty \right\}$$

Contoh

$$= \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \geq 0\}$$

$$= \{x \geq 0 \mid x \geq 0\}$$

$$= x \in [0,\infty) \cap [0,\infty)$$

$$= x \in [0,\infty)$$

b. Mencari Range $g \circ f$

$$R_{g \circ f} = \{y \in R_g \mid y = g(t), t \in R_f\}$$

$$R_{g \circ f} = \{y \in (-\infty,1] \mid y = 1 - t^2, t \in [0,\infty)\}$$

Jadi $R_{g \circ f} = y \in (-\infty,1] \cap (-\infty,1]$

$$= y \in (-\infty,1]$$

Contoh

Karena $R_g \cap D_f = (-\infty,1] \cap [0,\infty) = [0,1] \neq \phi$, maka fungsi $f \circ g$ terdefinisi dengan

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-x^2) = \sqrt{1-x^2}$$

c.Domain $f \circ g$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \Re \,|\, 1-x^2 \in [0,\infty)\} \\ &= \{x \in \Re \,|\, 1-x^2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \Re \,|\, -1 \leq x \leq 1\} \\ &= \Re \cap [-1,1] \\ &= [-1,1] \end{aligned}$$

Contoh

d. Range $f \circ g$

$$R_{f \circ g} = \left\{ y \in R_f \,\middle|\, y = f(t), t \in R_g \right\}$$

$$= \left\{ y \in [0, \infty) \,\middle|\, y = \sqrt{t}, t \in (-\infty, 1] \right\}$$

$$= \left\{ y \ge 0 \,\middle|\, y = \sqrt{t}, 0 \le t \le 1 \right\}$$

$$= \left\{ y \ge 0 \,\middle|\, 0 \le y \le 1 \right\}$$

$$= [0, \infty) \cap [0,1]$$

$$= [0,1]$$

Contoh

2. Jika diketahui fungsi

$$f(x) = x|x| \qquad g(x) = x - 1$$

$$D_f = \Re \quad R_f = \Re \qquad R_g = \Re \quad D_g = \Re$$

Tentukan $g \circ f$ beserta domain dan range-nya!

$R_f \cap D_g$ = $\Re \cap \Re = \Re \neq \phi$, sehingga $g \circ f$ terdefinisi

a. Domain $g \circ f$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \Re \,| \quad x|x| \in \Re\}$$

$$= \Re \cap \Re \quad = \Re$$

Contoh

b. Range $g \circ f$

$$R_{g \circ f} = \left\{ y \in R_g \,\middle|\, y = g(t), t \in R_f \right\}$$

$$= \left\{ y \in \Re \,\middle|\, y = t - 1, t \in \Re \right\}$$

$$= \Re \cap \Re = \Re$$

Grafik dari fungsi

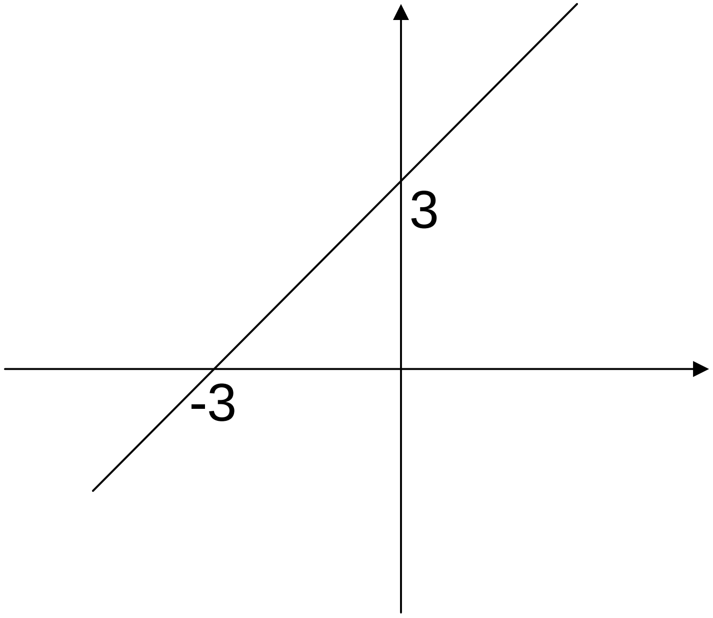
1. Garis Lurus

$$y = mx + c$$

persamaan garis lurus yang melewati (0,c)

contoh :

$$y = x + 3$$



Garis Lurus

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Persamaan garis lurus melalui (x_1, y_1)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis lurus melalui $(x_1, y_1) \& (x_2, y_2)$

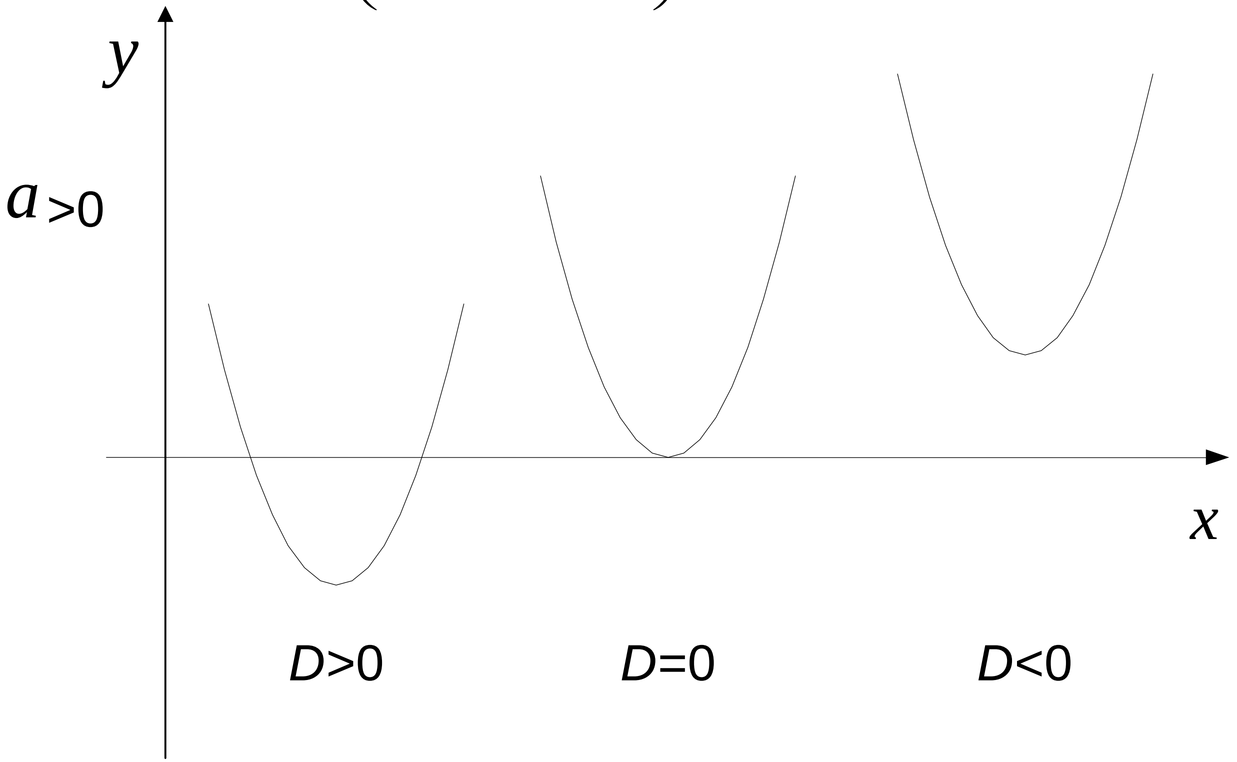
2. Grafik fungsi kuadrat (parabola)

$$y = ax^2 + bx + c$$

Diskriminan $\rightarrow$ $D = b^2 - 4ac$

Grafik Fungsi Kuadrat

Titik puncak = $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{D}{4a}\right)$



Grafik Fungsi Kuadrat

Contoh :

Gambarlah grafik fungsi $y = x^2 + x + 1$

a =1 jadi *a* > 0 $\rightarrow$ grafik menghadap ke atas

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= 1^2 - 4$$

$= -3 < 0$ $\rightarrow$ tidak menyinggung sumbu *x*

Grafik Fungsi Kuadrat

- Titik potong dengan sumbu koordinat
  - Karena D<0, maka titik potong dengan sumbu *x* tidak ada
  - Titik potong dengan sumbu *y*

    $x = 0 \rightarrow y = 1$

    dengan demikian grafik melalui (0,1)

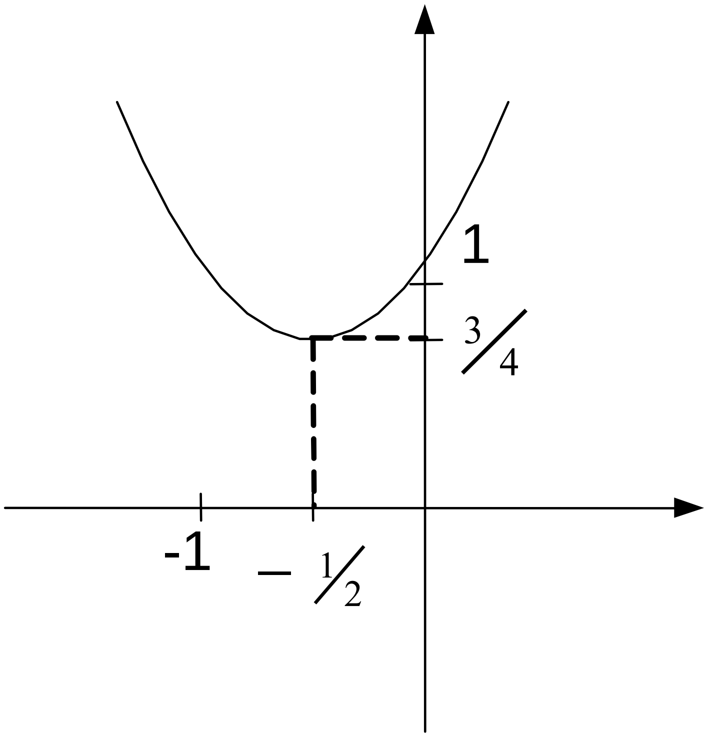
- Titik puncak = $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{D}{4a}\right)$

$$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

Grafik Fungsi Kuadrat

Gambar grafik fungsi

$$y = x^2 + x + 1$$



Untuk persamaan kuadrat

$$x = ay^2 + by + c$$

Titik puncak = $\left(-\frac{D}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

Sumbu simetri = $-\frac{b}{2a}$

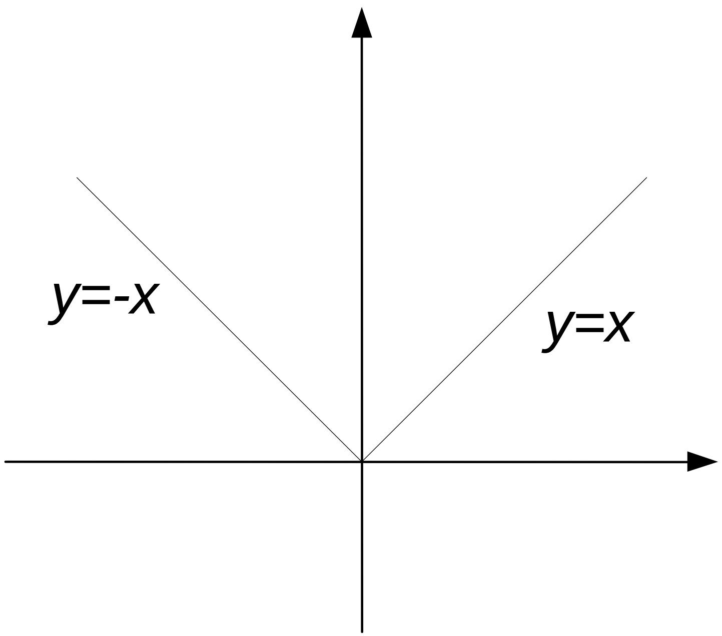
Grafik Fungsi Majemuk

3. Grafik Fungsi Majemuk

Contoh :

1. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

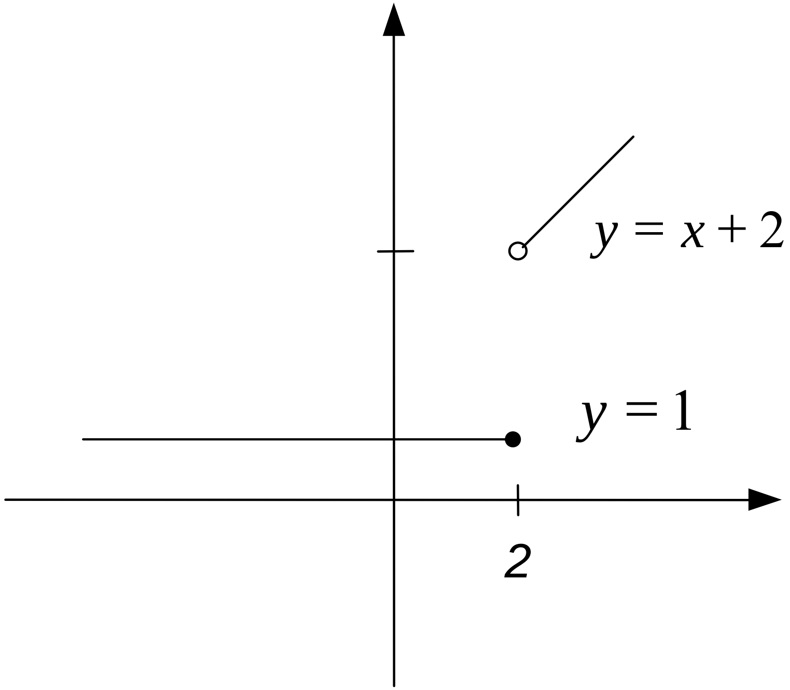


Grafik Fungsi Majemuk

2. Gambarkan grafik fungsi

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x \le 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases}$$

Grafiknya terdiri dari 2 bagian, yaitu garis $y = 1$ untuk $x \le 2$ dan garis $y = x + 2$ untuk $x > 2$



Grafik Fungsi Majemuk

3. Gambarkan grafik dari fungsi

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$$

f(*x*) terdefinisi untuk setiap *x* kecuali 2, sehingga domain dari *f*(*x*) adalah semua bilangan riil kecuali 2

Fungsi *f*(*x*) dapat diuraikan sebagai berikut :

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$$

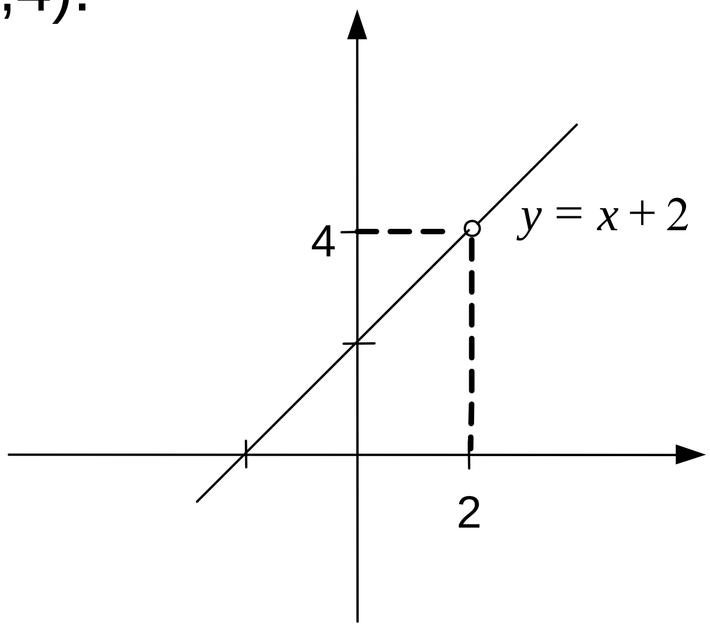
Grafik Fungsi Majemuk

atau $f(x) = x + 2$, jika $x \neq 2$

Range dari *f*(*x*) adalah semua bilangan riil kecuali 4.

Jadi grafiknya terdiri dari semua titik pada garis $y = x + 2$

kecuali titik (2,4).



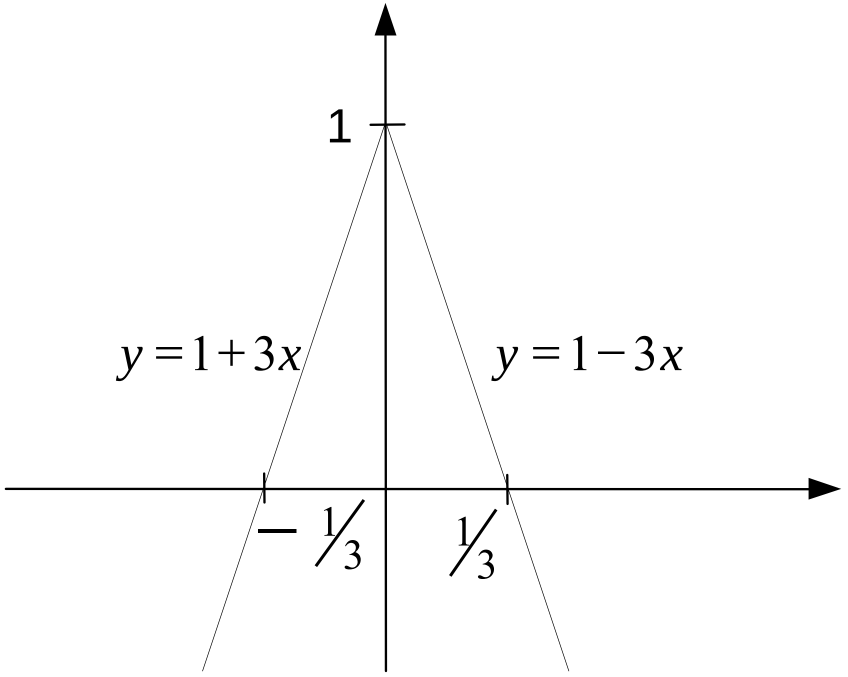
Grafik Fungsi Majemuk

3. Gambarkan grafik dari fungsi

$$f\left(x\right)=1-3\left|x\right|$$

Kita definisikan :

$$1-3\left|x\right|=\begin{cases}1-3x & x\geq 0\\ 1+3x & x<0\end{cases}$$



Translasi

Untuk fungsi yang dinyatakan sebagai $y = f(x)$, $a > 0$

$$y = f(x-a)$$

$\rightarrow$ grafik $y = f(x)$ mengalami pergeseran sejauh *a* ke kanan

$$y = f(x+a)$$

$\rightarrow$ grafik $y = f(x)$ mengalami pergeseran sejauh *a* ke kiri

$$y = f(x)+a$$

$\rightarrow$ grafik $y = f(x)$ mengalami pergeseran sejauh *a* ke atas

$$y = f(x)-a$$

$\rightarrow$ grafik $y = f(x)$ mengalami pergeseran sejauh *a* ke bawah

Translasi

Untuk fungsi yang dinyatakan sebagai $x = f(y)$, $a > 0$

$$x = f(y-a)$$

$\rightarrow$ grafik $x = f(y)$ mengalami pergeseran sejauh *a* ke atas

$$x = f(y+a)$$

$\rightarrow$ grafik $x = f(y)$ mengalami pergeseran sejauh *a* ke bawah

$$x = f(y)+a$$

$\rightarrow$ grafik $x = f(y)$ mengalami pergeseran sejauh *a* ke kanan

$$x = f(y)-a$$

$\rightarrow$ grafik $x = f(y)$ mengalami pergeseran sejauh *a* ke kiri

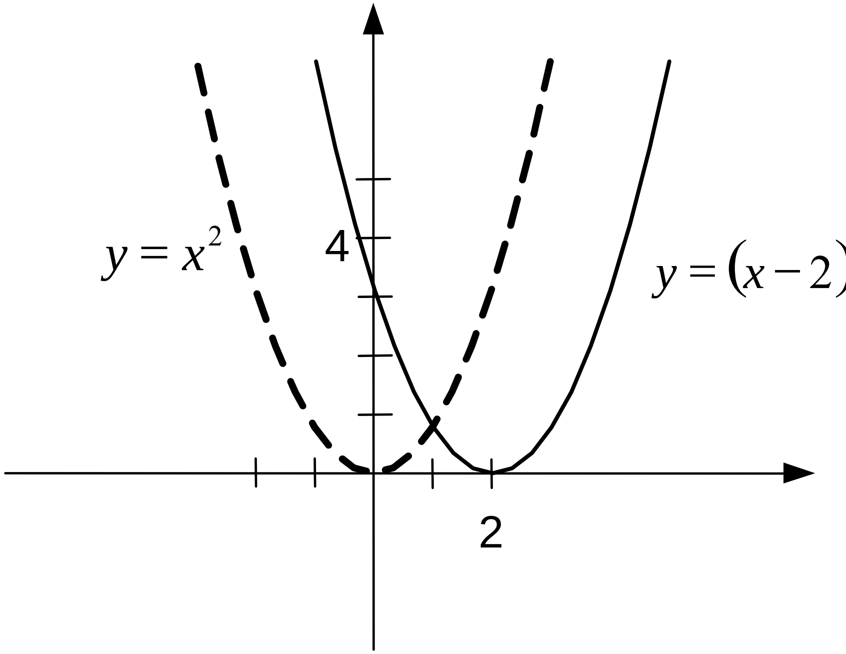
Contoh Translasi

1. Gambarkan grafik dari fungsi

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$
$$= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 5$$
$$= (x-2)^2 + 1$$

$$y = (x-2)^2$$

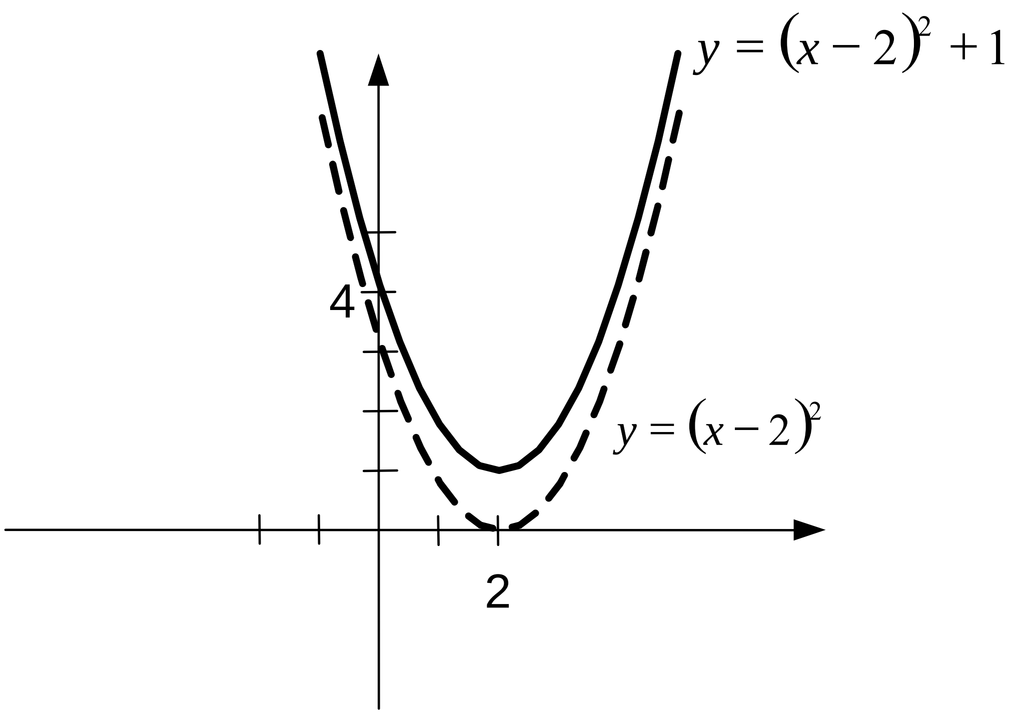
$\rightarrow y = x^2$ digeser sejauh 2 ke kanan



Contoh Translasi

Kemudian $y = (x-2)^2$ digeser sejauh 1 ke atas

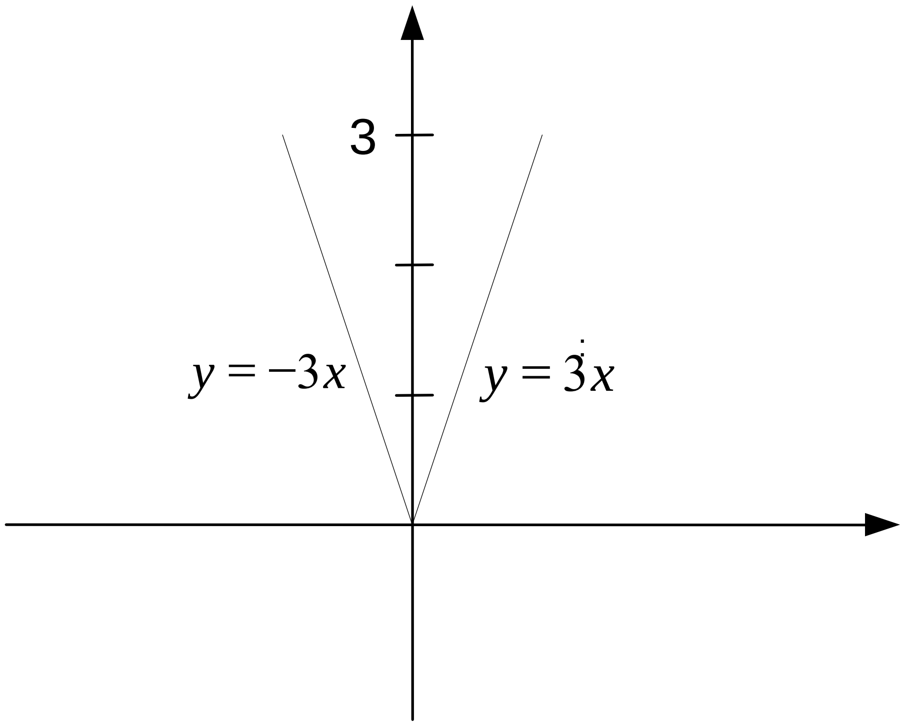
maka akan terbentuk $y = (x-2)^2 + 1$



Contoh Translasi

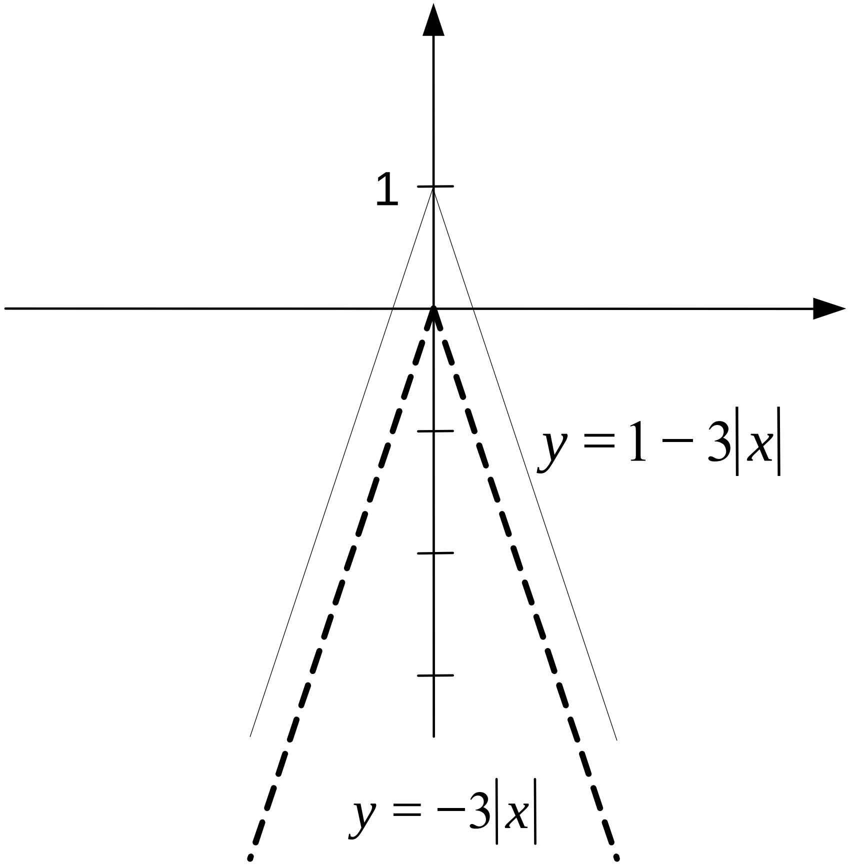
2. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = 1 - 3|x|$

Kita lihat dahulu grafik $y = 3|x|$



Contoh Translasi

Grafik $y = 1 - 3|x|$ dapat dipandang sebagai grafik $y = -3|x|$ yang digeser ke atas sejauh 1 satuan



Soal Latihan

Tentukan domain dan range dari fungsi di bawah ini

1 $f(x) = 3 + \sqrt{2-4x}$

2 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x-1}}$

3 $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x} + 2$

4 $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

5 Diketahui $f(x) = \sqrt{4-x}$ $g(x) = |x|$

Apakah $f \circ g$ terdefinisi? Bila ya, tentukan rumusan dari $f \circ g$ dan domain dari $f \circ g$.

Gambarkan grafik dari fungsi di bawah ini

6 $f(x) = |x|(x+2)$

7 $f(x) = \sqrt{3 - |x-2|}$