Limit & Kontinuitas

Oleh: Hanung N. Prasetyo

Bab 2. LIMIT

2.1. Dua masalah fundamental kalkulus.

2.2. Garis Tangen

2.3. Konsep Limit

2.4. Teorema Limit

2.5. Konsep kontinuitas

Dua Masalah Fundamental Kalkulus

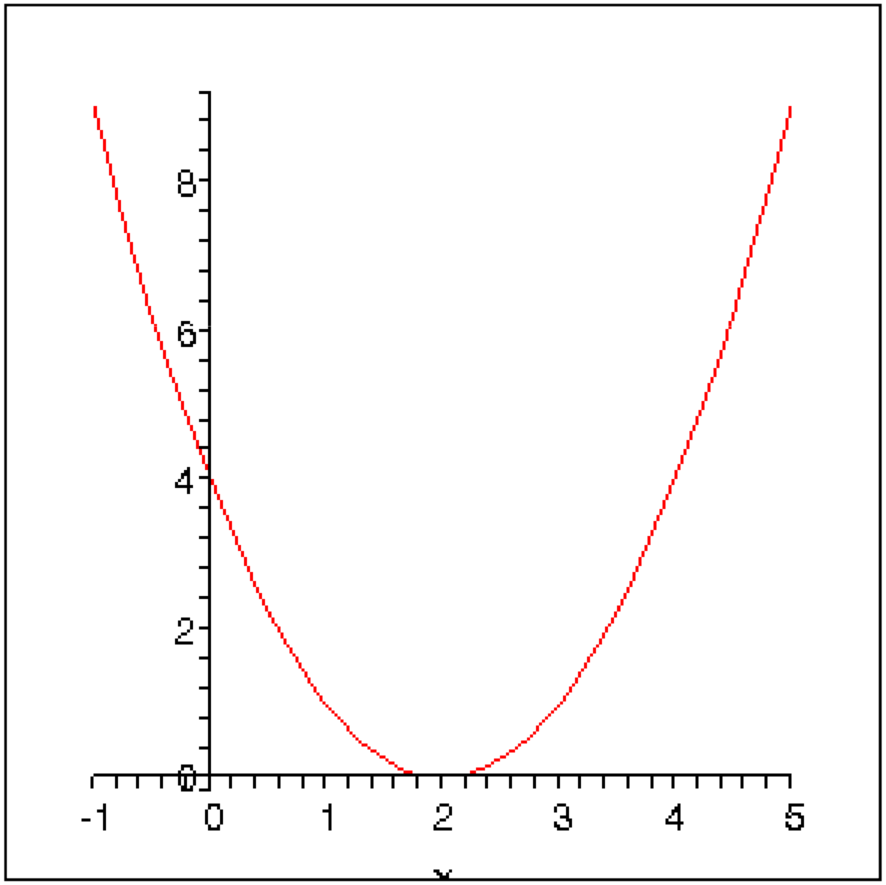
- Masalah 1 (Masalah Tangen):

  Diberikan sebuah titik $P(x,f(x))$ pada kurva $y=f(x)$, bagaimana menentukan kemiringan garis tangen pada P?

- Masalah 2 (Masalah Luas):

  Jika $f(x) \geq 0$ untuk $x \in [a,b]$, bagaimana menghitung luas daerah A yaitu suatu bidang yang berada diantara kurva $y=f(x)$ dan sumbu-x sepanjang selang $[a,b]$?

Grafik $f(x)=(x-2)^2$



2.2. Garis Tangen

- Misalkan diberikan suatu fungsi *f(x),* maka kemiringan garis tangen *L* di titik *P(a, f(a))* pada kurva *y=f(x)* dapat diaproksimasi dengan kemiringan **garis secant** antara titik *P* dan titik *Q(a+h, f(a+h))*.

$$\boldsymbol{m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}, \quad (\boldsymbol{h} \neq 0).$$

- Bila *Q* dibuat mendekati *P* dgn menelusuri kurva *y=f(x)* dan *h* menuju 0, maka diperoleh **kemiringan garis tangen kurva *y=f(x)* di titik *P(a,f(a))*:**

$$\boldsymbol{m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

2.3 Konsep Limit

Definisi Intuitif

Misalkan *y=f(x)* suatu fungsi, *a* dan L bilangan riil sedemikian hingga:

- Bila *x* dekat *a* tetapi tidak sama dg *a* ($x \neq a$), *f*(*x*) dekat ke L
- Bila *x* mendekati *a* tetapi $x \neq a$, maka *f(x)* mendekati L
- Misalkan *f(x)* dapat kita buat sedekat mungkin ke L dg membuat *x* cukup dekat *a* tetapi tdk sama dg a
- Maka dapat dikatakan bhw limit *f(x)* bila *x* mendekati *a* adalah L,

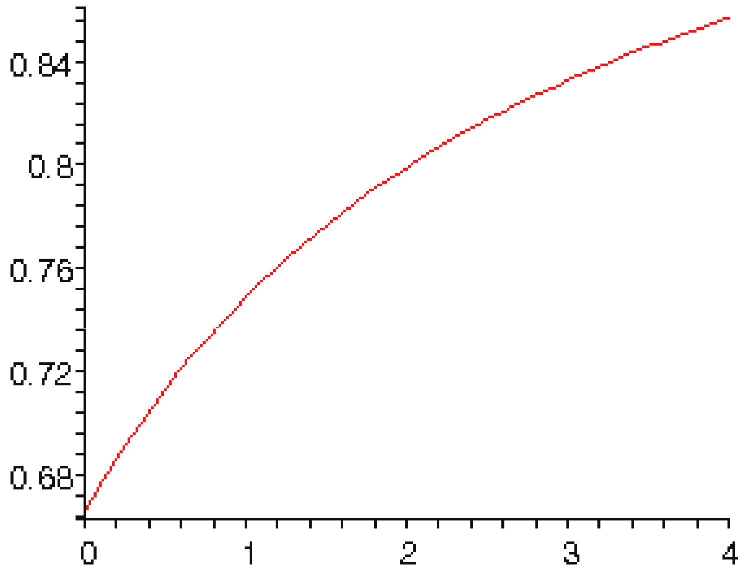
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

Contoh

1. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\frac{4}{5}$$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	0.75	3	0.83333
1.5	0.7778	2.5	0.81818
1.9	0.7959	2.1	0.80392
1.999	0.79996	2.001	0.80004
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	0.8	2	0.8

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$$



- Hitung $\lim_{x \to 0} f(x)$

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$

Hukum2 Limit:

1. $\lim\limits_{x \to a} C = C \qquad$ (Hk. Konstanta).

Jika limit berikut ada $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ maka

2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = [\lim\limits_{x \to a} f(x)] \pm [\lim\limits_{x \to a} g(x)] = L \pm M \quad$ (Hk. Penjumlahan)

3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = [\lim\limits_{x \to a} f(x)][\lim\limits_{x \to a} g(x)] = LM \qquad$ (Hk. Perkalian)

4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ asalkan jika $M \neq 0$. (Hk. Pecahan)

5. Jika n suatu bilangan bulat positif dan jika $a > 0$ untuk nilai n genap, maka

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}. \qquad \text{(Hk.Akar)}$$

6. Misalkan $\lim_{x \to a} g(x) = L$ dan $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$ maka

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(L). \qquad \text{(Hk.Substitusi/ Limit Komposisi)}$$

2.4. Teorema2 Limit

1. Teorema Limit trigonometri:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}} = 1$$

2. Hukum Apit: Misalkan $f(x) \le g(x) \le h(x)$ untuk semua x disekitar a namun $x \neq a$, dan

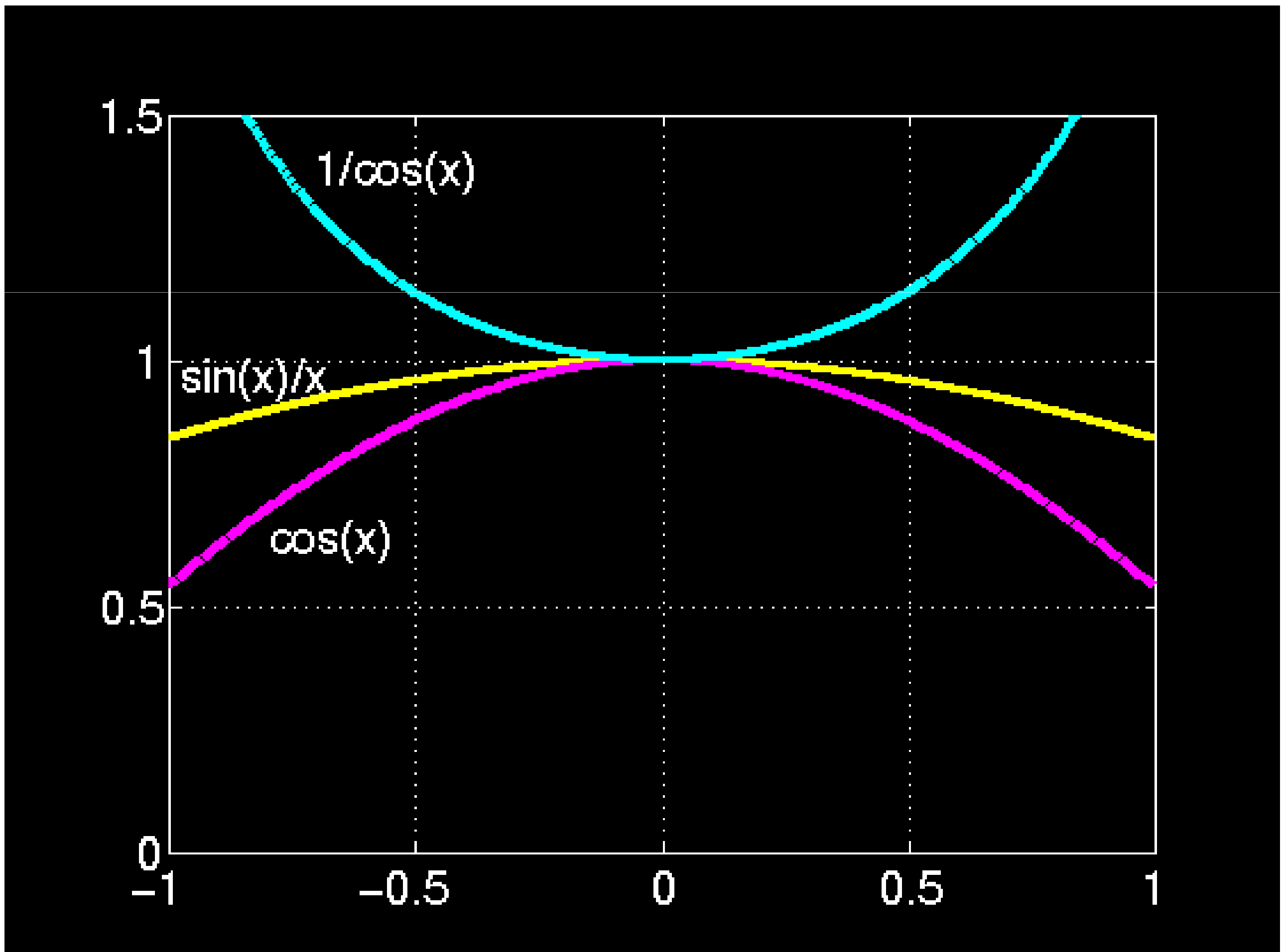
$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$$

maka

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

$$\cos(x) \le \sin(x)/x \le 1/\cos(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}, \quad \text{maka} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$



Contoh

Tunjukkan $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$

Bukti: Untuk $x \neq 0$, $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ dan $x^2 > 0$

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

karena $\lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$ dan $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

maka $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ (menggunakan Prinsip Apit).

- Limit kiri (limit *f(x)* bila *x* menuju *a* dari kiri)

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

- Limit kanan (limit *f(x)* bila *x* menuju *a* dari kanan)

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

- <u>Teorema 2</u>: $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

jika dan hanya jika $$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

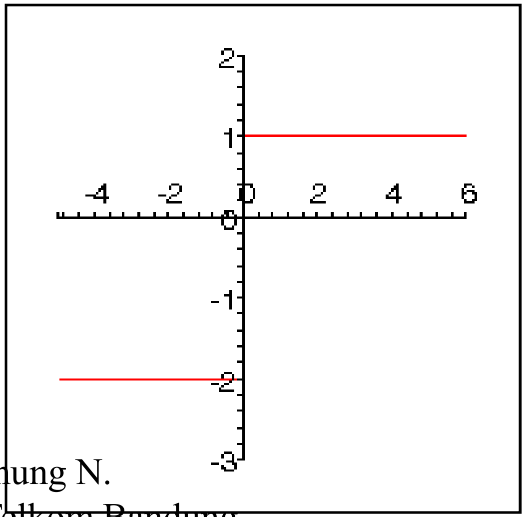
Contoh

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -2, & x<0\end{cases}.$$

Untuk $x>0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} 1=1.$ **limit kanan.**

Untuk $x<0$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(-2)=-2.$ **limit kiri.**

Maka $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ tidak ada



Contoh2 limit

(1) $\lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2.$

(2) $\lim_{x \to 0} |x| = 0.$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ does not exist.

(4) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ does not exist.

Need one - sided limits for such example - discussed later.

(5) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$;

Disini $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \Rightarrow f(3)$ tidak terdefinisi.

Tetapi

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = x + 3,\ \text{untuk}\ x \neq 3.$$

Jadi

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6.$$

- **Definisi Limit.**

Limit dari $f(x)$ bila x menuju a adalah $L \in R$, ditulis

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

jika dan hanya jika, untuk $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika

$0 < |x - a| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.