Course of Calculus

MATRIKS

Oleh : Hanung N. Prasetyo

Information system Departement
Telkom Politechnic
Bandung

Matriks dan vektor merupakan pengembangan dari sistem persamaan Linier. Matriks dapat digunakan untuk merumuskan berbagai masalah termasuk masalah-masalah bisnis dan ekonomi

Matriks ialah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang serta termuat di antara sepasang tanda kurung

Bentuk umum dari matriks

Entry

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & aij \end{bmatrix}$$

Baris

Kolom

Kurung persegi

Pengoperasian Matriks

- Penjumlahan dan pengurangan matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

Kaidah dalam penjumlahan & pengurangan

Kaidah Komutatif

$A + B = B + A$

Kaidah asosiatif

$A + (B + C) = (A + B) + C$

Perkalian matriks dengan skalar

$kA = B$

Kaidah dalam perkalian

$kA = Ak$

$k(A+B) = kA + kB$

$K(A-B) = kA - kB$

Perkalian antar matriks

Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila jumlah kolom dari matriks yang dikalikan sama dengan jumlah baris dari matriks pengalinya.

Hasil kali matriks

A_{m*n} dengan B_{n*p} adalah sebuah

matriks baru C_{m*p} yang unsur-unsurnya merupakan hasil perkalian silang

Kaidah dalam perkalian

Kaidah Asosiatif

$A(BC)=(AB)C$

Kaidah Distributif

$A(B+C)=AB+AC$

Bentuk-bentuk khas Matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{matriks} \quad \textit{null}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{matriks} \quad \textit{identitas}$$

Matriks transpose(ubahan)

Adalah matriks yang merupakan hasil pengubahan matriks lain yang sudah ada sebelumnya, dimana unsur-unsur barisnya menjadi unsur-unsur kolom dan unsur kolom menjadi baris

Notasi:

Matriks A menjadi matriks A^t

Contoh matriks transpose

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Matriks simetri : matriks bujursangkar yang sama dengan ubahannya

$A = A^t$

Matriks Balikan/Invers

Adalah matriks yang apabila dikalikan dengan matriks bujursangkar akan menghasilkan sebuah matriks satuan.

Dinotasikan dengan

$A \rightarrow A^{-1}$

Determinan

Determinan ialah penulisan unsur-unsur sebuah matriks kuadrat dalam bentuk determinan yaitu diantara sepasang garis tegak. Determinan berbeda dengan matriks

- Determinan unsur-unsurnya diapit garis tegak
- Determinan berbentuk kuadrat
- Determinan mempunyai nilai numerik

Persamaan linier :

Persamaan yang semua variabelnya berpangkat 1

Contoh:

$$\mathbf{x + y + 2z = 9}$$

Solusi: berupa suatu "tripel" dengan masing-masing nilai sesuai urutan **(nilai-x, nilai-y, nilai-z)** yang memenuhi persamaan tersebut.

Himpunan solusi untuk persamaan di atas:

{ … (0, 1, 4), (1, 0, 4), (4, 5, 0), …. }

Himpunan solusi juga disebut Ruang Solusi (*solution space*)

Sistem Persamaan Linier:

Suatu sistem dengan beberapa (2 atau lebih) persamaan linier.

Contoh:

$$\mathbf{x + y = 3}$$

$$\mathbf{3x - 5y = 1}$$

Ruang Solusi:

berupa semua ***ordered-pair*** **(nilai-x, nilai-y)** yang harus memenuhi semua persamaan linier dalam sistem tersebut; untuk sistem ini ruang solusinya { **(2, 1)** }

Interpretasi Geometrik:

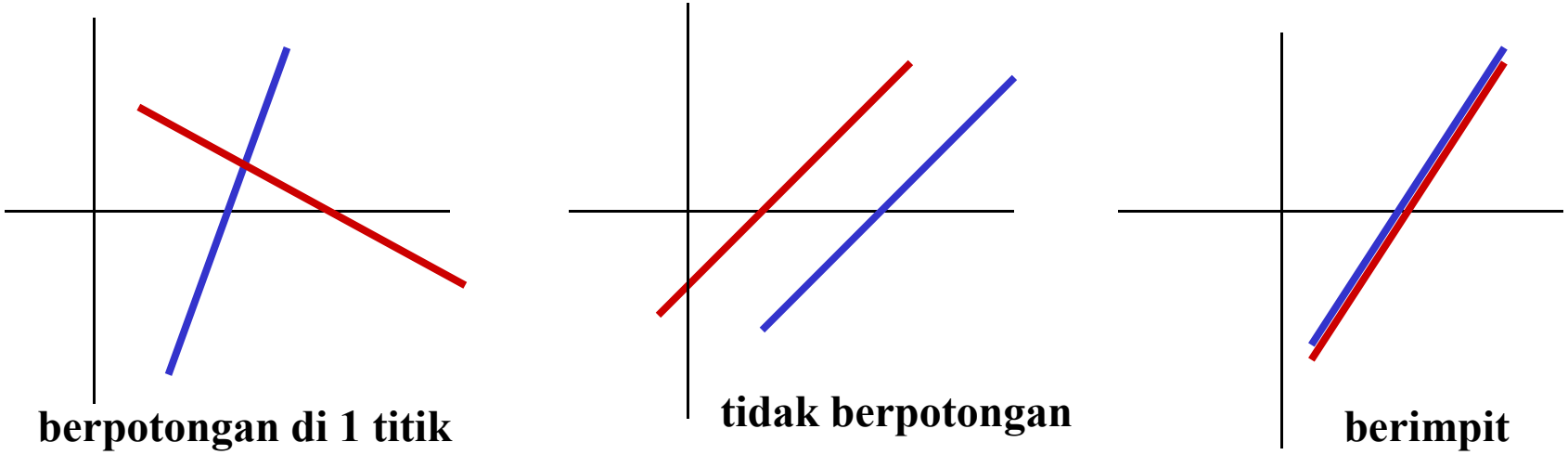
Sistem menggambarkan 2 garis lurus pada sebuah bidang datar.

g_1: $\mathbf{x + y = 3}$

g_2: $\mathbf{3x - 5y = 1}$

Solusi: g_1 dan g_2 berpotongan di **(2, 1)**

Kemungkinan:



Solusi Sistem Persamaan Linier

a. Cara "lama" - dengan eliminasi / substitusi

b. Eliminasi Gauss

c. Eliminasi Gauss - Jordan

a. Cara "lama":

x dieliminasi

I. $x + y = 3 \rightarrow 3x + 3y = 9$

$3x - 5y = 1 \rightarrow 3x - 5y = 1$ −

$8y = 8 \rightarrow y = 1$

$3x - 5 = 1 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$

II. $y = 3 - x$ y disubstitusi

$3x - 5(3 - x) = 1$ atau $3x - 15 + 5x = 1 \rightarrow 8x = 16 \rightarrow x = 2$

$y = 3 - x \rightarrow y = 1$

Matriks *Augmented* : **(Matriks yang diperbesar)**

Matriks yang entri-entrinya dibentuk dari koefisien-koefisien Sistem Persamaan Linier

Contoh :

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Matriks *Augmented*-nya :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

b. Eliminasi Gauss (lihat contoh 3, halaman 5)

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{bentuk matriks } \textit{augmented}]{\text{ditulis dalam}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

lalu diusahakan berbentuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? \end{array}\right)$$

dengan proses **Operasi Baris Elementer (OBE)**

(Elementary Row Operation - ERO)

Operasi Baris Elementer (OBE)

(Elementary Row Operation - ERO)

Perhatikan bahwa tiap <u>baris</u> dari matriks merepresentasikan <u>persamaan linier</u>

1. **Mengalikan suatu baris dengan bilangan nyata $k \neq 0$**
2. **Menukar posisi dua baris**
3. **Menambah baris-i dengan k kali baris-j**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{baris-3 + (-3) x baris-1}]{\text{baris-2 + (-2) x baris-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right)$$

baris-3 + (-3/2)x baris-2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \end{array}$$

Substitusi Balik:

$$\longrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\, z = -\tfrac{3}{2} \quad \longrightarrow \quad z = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \quad z$$

$$\longrightarrow \quad 2y - 7z = -17$$

$$2y = 21 - 17 \quad \longrightarrow \quad y = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \quad y \quad z$$

$$\longrightarrow \quad x + y + 2z = 9$$

$$x = -2 - 6 + 9 \quad \longrightarrow \quad x = 1$$

Eliminasi Gauss (ringkasan):

Sistem Persamaan Linier → Matriks *Augmented* → Eliminasi Gauss → Substitusi Balik

↑

OBE

c. **Eliminasi Gauss-Jordan** (contoh yang sama)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

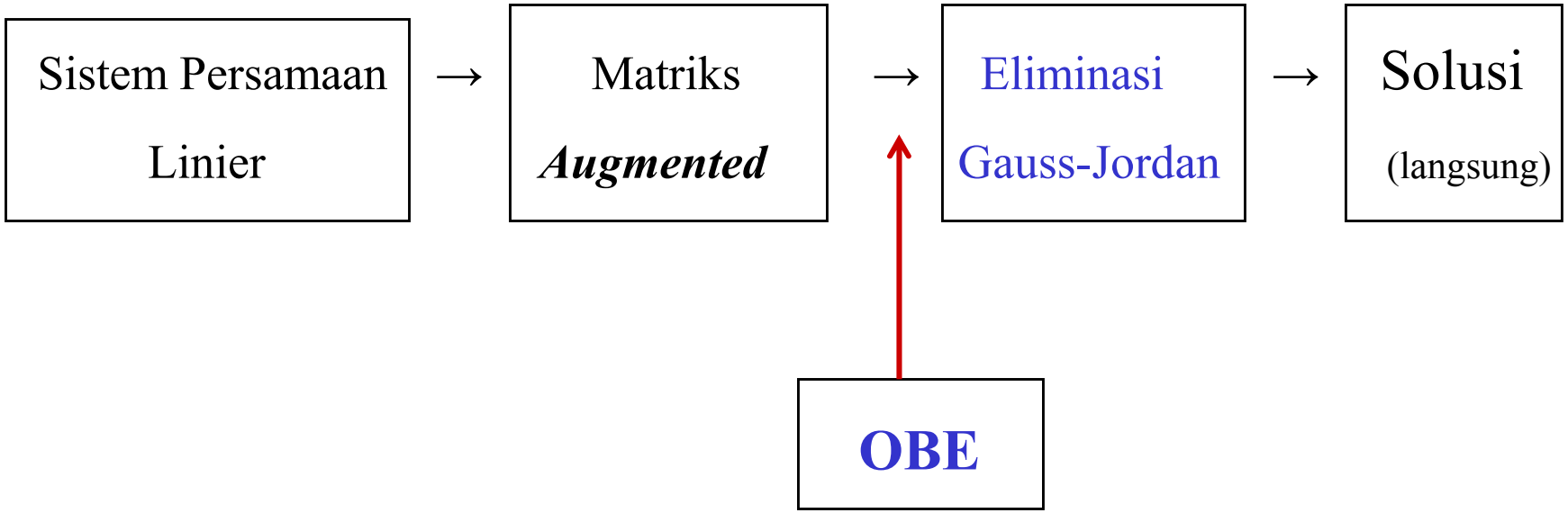
dan diusahakan berbentuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \end{array}\right)$$

dengan proses **Operasi Baris Elementer (OBE)**

(Elementary Row Operation - ERO)

Eliminasi Gauss-Jordan (ringkasan):



Bentuk eselon baris:

1. **Entri-entri dalam sebuah baris tidak semuanya nol, maka entri pertama yang tidak nol harus 1 (disebut 1-utama / *leading-1*)**
2. **Baris-baris yang semua entrinya 0, dikelompokkan di bagian bawah matriks**
3. **Posisi 1-utama dari baris yang lebih bawah harus lebih ke <u>kanan</u> d/p 1-utama baris yang lebih atas**

Bentuk eselon baris tereduksi:

1, 2, 3, ditambah

4. **Semua entri (yang lain) dari kolom yang berisi 1-utama harus di-0-kan**

Sistem Persamaan Linier Homogen :

1. **Sistem Persamaan Linier dikatakan homogen jika semua suku di kanan tanda "=" adalah 0.**

2. **Solusi Sistem Persamaan Linier Homogen:**

   Solusi Trivial (semua $x_i = 0$; $i = 1 .. n$): pasti ada

   Solusi Non-trivial (solusi trivial, *plus* solusi di mana ada $x_i \neq 0$)

Contoh: **lihat contoh 6 halaman 18 dan verifikasi proses penyelesaiannya**

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Contoh:</u> lihat contoh 6 halaman 18 dan verifikasi proses penyelesaiannya

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{Brs-1} \times (1/2)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{Brs-2 + brs-1} \\ \\ \text{Brs-3 – brs-1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Brs-2 × (2/3)

Brs-3 × (– 2/3)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Brs-3 – brs-2

Brs-4 – brs-2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{Brs-3} \times (1/2) \\ \text{Brs-4} \times (1/3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{Brs-4} - \text{brs-3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{baris-1} + (1/2) \times \text{baris-2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 0 \\ x_3 \qquad + x_5 &= 0 \\ x_4 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

$x_5 = s \rightarrow x_3 + x_5 = 0 \rightarrow x_3 = -x_5$

$x_2 = t \rightarrow x_1 + x_2 + x_5 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2 - x_5$

Ruang solusinya = { (-t-s, t, -s, 0, s) }

Teorema:

Sistem Persamaan Linier Homogen dengan **variabel** lebih banyak d/p. **persamaan** mempunyai tak berhingga banyak pemecahan.

Ditinjau dari matriksnya:

Sistem Persamaan Linier Homogen dengan **kolom** lebih banyak d/p. **baris** mempunyai tak berhingga banyak pemecahan.