
VEKTOR

Mata Kuliah : Calculus (MF113)

Oleh : Hanung N. Prasetyo



Information System Department
TELKOM Polytechnic
Bandung



FIGURE 13.12 Spanish archer Antonio Rebollo lights the Olympic torch in Barcelona with a flaming arrow.

1. Vektor di Ruang 2

■ Besaran Skalar dan Besaran Vektor

- Besaran skalar adalah besaran yang hanya memiliki besar (panjang/nilai)
 - Ex: waktu, suhu, panjang, luas, volum, massa
- Besaran Vektor-> memiliki besar dan arah
 - Ex: kecepatan, percepatan, gaya, momentum, medan magnet, medan listrik
- Notasi Vektor
 - Ruas garis berarah yg panjang dan arahnya tertentu.
 - Vektor dinyatakan dg huruf \bar{u} , \underline{u} , \mathbf{u} (bold), atau u (italic).
 - Jika \mathbf{u} menyatakan ruas garis berarah dari A ke B, maka ditulis dengan lambang $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$
 - Notasi \mathbf{u} dibaca “**vektor u**”

Penyajian Vektor

- Vektor sbg pasangan bilangan

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{u} = (a, b)$

- a : komponen mendatar, b : komponen vertikal

- Vektor sbg kombinasi vektor satuan \mathbf{i} dan \mathbf{j}

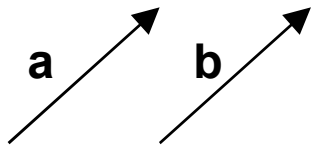
- $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

- Panjang vektor \mathbf{u} ditentukan oleh rumus

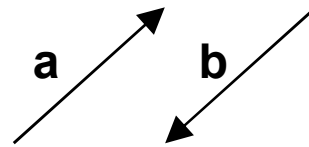
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Kesamaan Vektor

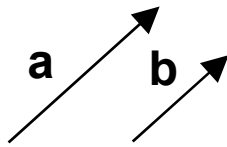
- Dua buah vektor dikatakan sama besar bila besar dan arahnya sama.
 - Misalkan $\mathbf{u} = (a,b)$ dan $\mathbf{v} = (c,d)$
 - Jika $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, maka
 - $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$
 - arah $\mathbf{u} =$ arah \mathbf{v}
 - $a=c$ dan $b=d$



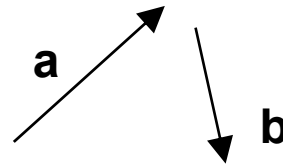
**Dua vektor sama,
 $a = b$**



**Dua Vektor
mempunyai besar
sama, arah
berbeda**

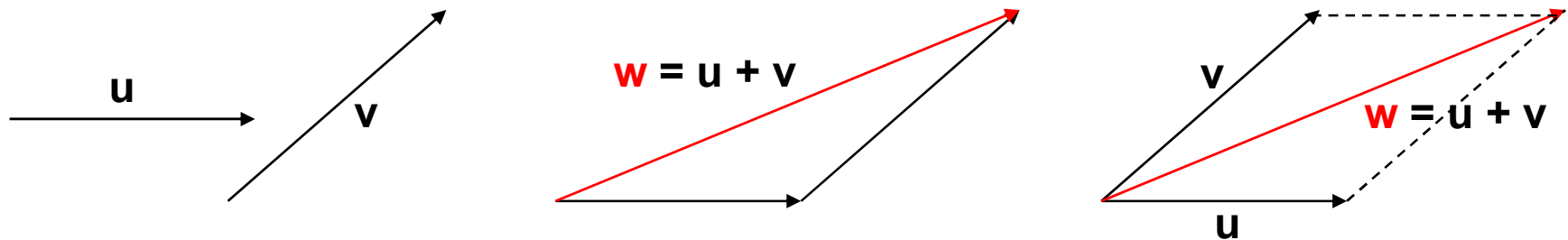


**Dua vektor arah
sama, besaran
beda**



**Dua Vektor besar
dan arah berbeda**

Penjumlahan Vektor



- Penjumlahan vektor menurut aturan segitiga dan aturan jajaran genjang
- Dalam bentuk pasangan bilangan sbb:

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ dan } v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$
$$u + v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

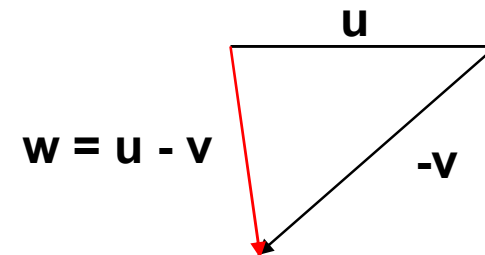
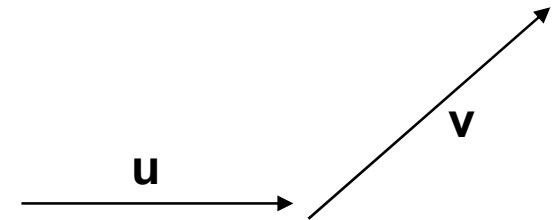
Elemen Identitas

- Vektor nol ditulis $\mathbf{0}$
- Vektor nol disebut elemen identitas
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- Jika \mathbf{u} adalah sebarang vektor bukan nol, maka $-\mathbf{u}$ adalah **invers aditif** \mathbf{u} yang didefinisikan sebagai vektor yang memiliki besar sama tetapi arah berlawanan.
- $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Pengurangan Vektor

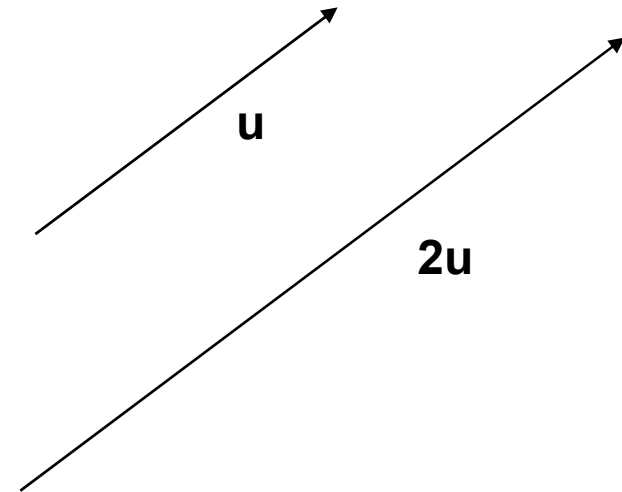
- Selisih dua vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} ditulis $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ didefinisikan $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$
- Dalam bentuk pasangan bilangan

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix}$$



Perkalian Vektor dengan Skalar

- $m\mathbf{u}$ adalah suatu vektor dg panjang m kali panjang vektor \mathbf{u} dan searah dengan \mathbf{u} jika $m > 0$, dan berlawanan arah jika $m < 0$.



Jika $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $m \in \{\text{bilangan real}\}$,

$$\text{maka: } m\mathbf{u} = m \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma \\ mb \end{pmatrix}$$

Sifat-Sifat Operasi Vektor

- Komutatif $\rightarrow a + b = b + a$
- Asosiatif $\rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$
- Elemen identitas terhadap penjumlahan
- Sifat tertutup \rightarrow hasil penjumlahan vektor juga berupa vektor
- Ketidaksamaan segitiga $|u+v| \leq |u| + |v|$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
- $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $m\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- Jika $m\mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $m=0$ atau $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Sifat-Sifat Operasi Vektor (lanj.)

- $(mn)\mathbf{u} = m(n\mathbf{u})$
- $|m\mathbf{u}| = |m||\mathbf{u}|$
- $(-m\mathbf{u}) = -(m\mathbf{u}) = m(-\mathbf{u})$
- Distributif : $(m+n)\mathbf{u} = m\mathbf{u} + n\mathbf{u}$
- Distributif : $m(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = m\mathbf{u} + m\mathbf{v}$
- $\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Besar Vektor Hasil Penjumlahan dan Pengurangan

Penjumlahan

$$\text{Jika } u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ dan } v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$u + v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

$$|u + v| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$$

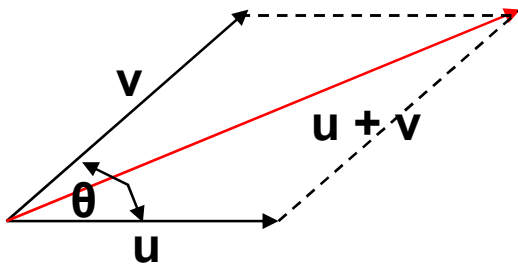
Pengurangan

$$\text{Jika } u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ dan } v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

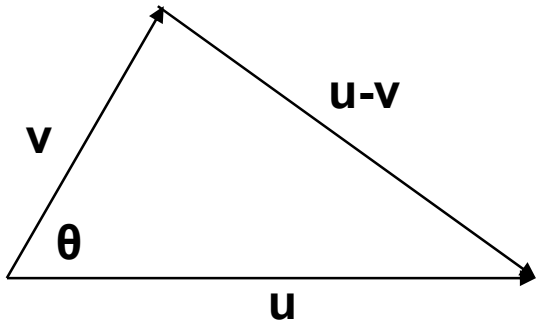
$$u - v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix}$$

$$|u - v| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

Menghitung Besar Vektor Hasil Penjumlahan dan Pengurangan

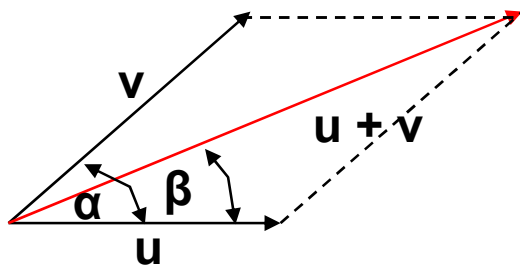


$$|u + v| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|\cos\theta}$$



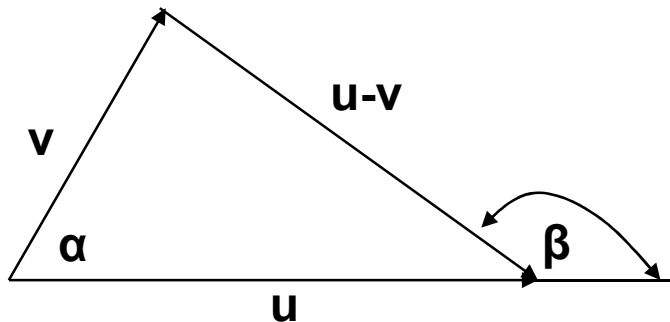
$$|u - v| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta}$$

Menentukan Arah Vektor Hasil Penjumlahan dan Pengurangan



$$\frac{|u+v|}{\sin \alpha} = \frac{|u|}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{|v|}{\sin \beta}$$

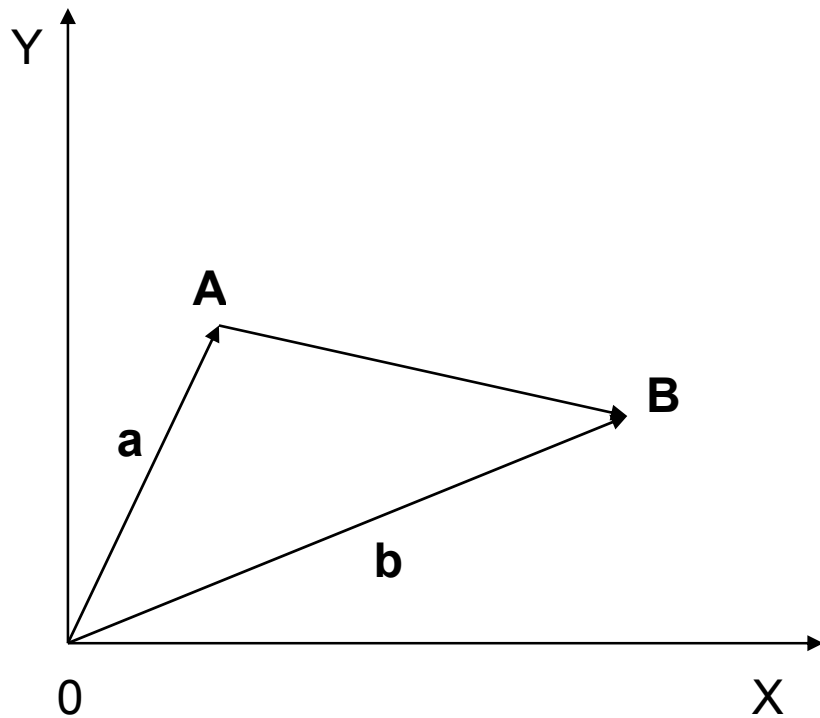
β : arah vektor hasil penjumlahan



$$\frac{|u-v|}{\sin \alpha} = \frac{|u|}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{|v|}{\sin \beta}$$

β : arah vektor hasil pengurangan

Vektor Posisi



- $OA = a$ dan $OB = b$ adalah vektor posisi.
- $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$
- $= \vec{OB} - \vec{OA}$
- $= b - a$

Dot Product (Inner Product)

- Perkalian titik (dot product) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (dibaca \mathbf{a} dot \mathbf{b}) antara dua vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} merupakan perkalian antara panjang vektor dan cosinus sudut antara keduanya.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \gamma$$

- Dalam bentuk komponen vektor, bila $\mathbf{a} = [a_1, b_1, c_1]$ dan $\mathbf{b} = [a_2, b_2, c_2]$, maka :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + c_3 c_3$$

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ jika $\{\gamma \mid 0 < \gamma < 90^\circ\}$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ jika $\{\gamma \mid \gamma = 90^\circ\}$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ jika $\{\gamma \mid 90^\circ < \gamma < 180^\circ\}$

Vektor Ortogonal

- Teorema
 - Hasil perkalian dot product antara dua vektor bukan-nol adalah nol jika dan hanya jika vektor-vektor tersebut saling tegak lurus
- Vektor **a** disebut ortogonal thd vektor **b** jika $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, dan vektor **b** juga ortogonal thd vektor **a**.
- Vektor nol **0** ortogonal terhadap semua vektor.
- Untuk vektor **bukan-nol**
 - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ jika dan hanya jika $\cos \gamma = 0 \rightarrow \gamma = 90^\circ = \pi/2$

Besar dan Arah dalam Perkalian Dot Product

- Besar Sudut γ dapat dihitung dgn:

$$\cos \gamma = \frac{a \bullet b}{|a| |b|} = \frac{a \bullet b}{\sqrt{a \bullet a} \sqrt{b \bullet b}}$$

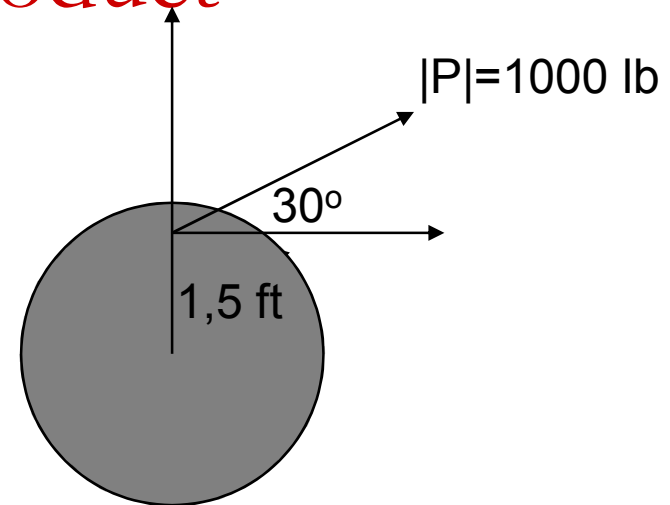
Contoh Perkalian Dot Product

- $a = [1, 2, 0]$ dan $b = [3, -2, 1]$
- Hitung sudut antara dua vektor tsb

Applications of Vector Product

Moment of a force

- Find moment of force P about the center of the wheel.



$$P = [1000 \cos 30^\circ, 1000 \sin 30^\circ, 0] \\ = [866, 500, 0]$$

$$r = [0, -1.5, 0] \quad (\text{pusat roda pada titik } y = 1,5)$$

$$m = r \times p = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 866 & 500 & 0 \end{vmatrix} = 0i + 0j + \begin{vmatrix} 0 & 1.5 \\ 866 & 500 \end{vmatrix} k = [0, 0, -1299]$$

Vektor moment (m) tegak lurus thd bidang roda (sumbu z negatif).

Scalar Triple Product

Scalar triple product dari tiga vektor

$$a = [a_1, a_2, a_3], \quad b = [b_1, b_2, b_3], \quad c = [c_1, c_2, c_3]$$

ditulis $(a \ b \ c)$ didefinisikan sebagai

$$(a \ b \ c) = a \bullet (b \times c) \quad \text{andaikan } b \times c = v = [v_1, v_2, v_3]$$

$$a \bullet (b \times c) = a \bullet v = a_1 v_1, a_2 v_2, a_3 v_3$$

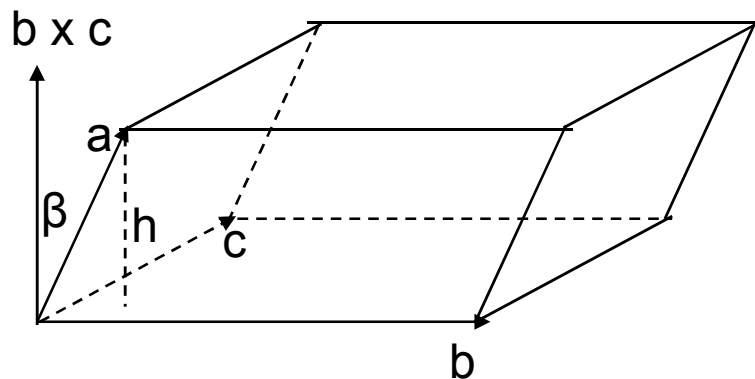
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \left(- \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} \right) + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ini mrpk ekspansi determinan orde 3 mnrt brs pertama, shg

$$(a \ b \ c) = a \bullet (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Scalar Triple Product

Geometric representation



- a, b, c vektor
- β sudut antara $(b \times c)$ dan a
- h tinggi parallelogram

Besar $a \bullet (b \times c)$

$$|a \bullet (b \times c)| = |a| |b \times c| \cos \beta$$

$$|a| \cos \beta = \text{height } h$$

jajaran genjang alas dg sisi b dan c mempunyai luas $area |b \times c|$

Referensi

- Advanced Engineering Mathematic, chapter 8
- Aljabar Linier Elementer, Howard Anton
- Fisika Mekanika Jilid 1, Faraday